

## 2019 年度後期 物理課題演習 A2 レポート

伊東 利将      落合 真治      神野 朝之丞      鳥羽 修平      ホッジ ルネ 倫

2020 年 9 月 30 日

## 目次

1	はじめに	2
2	理論	2
2.1	準備	2
2.2	荷電共役変換と二種類のポジトロニウム	2
2.3	軌道角運動量が $l$ の場合	4
2.4	S 行列の定義	4
2.5	寿命	5
3	実験	6
3.1	実験原理	6
3.2	実験器具	6
3.3	セットアップ	6
3.4	回路	8
4	解析	11
4.1	データ処理	12
4.2	TQ 補正	14
4.3	pick-off 補正	17
5	考察	23
5.1	イベント数	23
5.2	pick-off 補正関数	23
5.3	全データを用いた寿命の平均	25
6	謝辞	26
7	参考文献	26

# 1 はじめに

Maxwell 方程式の完成後、世界で最初に量子化されたものは光量子仮説による電磁場であった。物理において自身の発展とともに、他の理論、実験両方に対しても大きな進歩をもたらした電磁気学は今日量子電磁気学 (QED) の形で広く理解されている。我々はその理論の実験的検証を行うために、陽電子と電子の束縛状態であるポジトロニウム (Ps) の寿命測定を行った。

## 2 理論

### 2.1 準備

Dirac 方程式  $(i \not{\partial} - m) \psi = 0$  を満たす質量  $m$  の粒子の場  $\psi$  についてラグランジアン密度  $\mathcal{L}$  は

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi \quad (1)$$

と表される。これに U(1) 対称性を課し、ゲージ場の運動項を加えると

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2)$$

となる。ここで、 $D$  は共変微分、 $F^{\mu\nu}$  は電磁場テンソルである。

フォトンの反粒子はフォトン自身であるから、電磁場を Coulomb ゲージのもとで量子化すると

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_r (a_{r,\mathbf{p}} \epsilon_{r,\mathbf{p}}^\mu e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{r,\mathbf{p}}^\dagger \epsilon_{r,\mathbf{p}}^{\star\mu} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \quad (3)$$

となる。ここで、 $a_{r,\mathbf{p}}^\dagger$  と  $a_{r,\mathbf{p}}$  はそれぞれフォトンの生成消滅演算子、 $r$  はヘリシティ、 $\epsilon_{r,\mathbf{p}}$  はヘリシティの方向に垂直で互いに直交する単位ベクトルである。

### 2.2 荷電共役変換と二種類のポジトロニウム

この章ではポジトロニウムの軌道角運動量は 0 であるとする。荷電共役変換  $C$  はユニタリであることに注意すると、荷電共役変換の前後で (2) 式で与えられたラグランジアン密度  $\mathcal{L}$  を不変に保つため  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$  において  $CA_\mu C = -A_\mu$  となる必要がある。(3) 式で与えられた  $A_\mu$  を見ると、

$$Ca_{r,\mathbf{p}}C = -a_{r,\mathbf{p}} \quad (4)$$

$$Ca_{r,\mathbf{p}}^\dagger C = -a_{r,\mathbf{p}}^\dagger \quad (5)$$

となることが要請される。従って、フォトンが偶数個の系の荷電共役変換の固有値 (荷電パリティ) は 1、奇数個の系では -1 となる。

電子と陽電子のスピンを合成すると以下の 4 種類に分類される。

$$|\uparrow\rangle_+ \otimes |\uparrow\rangle_- \quad (6)$$

$$\frac{|\uparrow\rangle_+ \otimes |\downarrow\rangle_- + |\downarrow\rangle_+ \otimes |\uparrow\rangle_-}{\sqrt{2}} \quad (7)$$

$$|\downarrow\rangle_+ \otimes |\downarrow\rangle_- \quad (8)$$

$$\frac{|\uparrow\rangle_+ \otimes |\downarrow\rangle_- - |\downarrow\rangle_+ \otimes |\uparrow\rangle_-}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

ここで、添え字の + と - はそれぞれ陽電子、電子であることを表している。式 (6) から (8) で表される状態を  $|o - Ps\rangle$ 、式 (9) で表される状態を  $|p - Ps\rangle$  と書くことにする。

$|o - Ps\rangle$  の荷電パリティが -1 であることを次に示す。例えば、式 (6) において重心系で考えると、添え字を省略して  $b^\dagger$  を陽電子の生成演算子、 $d^\dagger$  を電子の生成演算子とするとフェルミオンの反交換関係  $\{b^\dagger, d^\dagger\} = 0$  を用いて以下のように証明される。

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle_+ \otimes |\uparrow\rangle_- &= b^\dagger d^\dagger |0\rangle \\ &\xrightarrow{C} d^\dagger b^\dagger |0\rangle \\ &= -b^\dagger d^\dagger |0\rangle \\ &= -|\uparrow\rangle_+ \otimes |\uparrow\rangle_- \end{aligned}$$

なお、一行目から二行目で荷電共役変換を施した。同様にして  $|o - Ps\rangle$  の固有値は -1、 $|p - Ps\rangle$  の固有値は 1 であることが示される。これらの帰結として  $o - Ps$  は奇数個のフォトン系、 $p - Ps$  は偶数個のフォトン系に崩壊することが導かれる。

ここで、Dirac 方程式を満たすならば Klein - Gordon 方程式を満たすのでその結論として Dirac 粒子である電子と陽電子は以下の関係式を満たす。但し、 $p_{e-}^\mu$  を電子の四元運動量、 $p_{e+}^\mu$  を陽電子の四元運動量、 $m$  を電子と陽電子の質量とする。

$$(p_{e-}^0)^2 = m^2 + \mathbf{p}_{e-}^2 \quad (10)$$

$$(p_{e+}^0)^2 = m^2 + \mathbf{p}_{e+}^2 \quad (11)$$

$$(p^0)^2 = \mathbf{p}^2 \quad (12)$$

$e^+ + e^- \rightarrow \gamma$  が起こらないことはエネルギー保存と運動量保存を仮定してこれらの式から以下のようにして証明される。

$$\begin{aligned} (p^0)^2 &= (p_{e-}^0)^2 + (p_{e+}^0)^2 \\ &= m^2 + \mathbf{p}_{e-}^2 + m^2 + \mathbf{p}_{e+}^2 \\ &= 2m^2 + (\mathbf{p}_{e+} + \mathbf{p}_{e-})^2 - 2\mathbf{p}_{e+} \cdot \mathbf{p}_{e-} \\ &= \mathbf{p}^2 + 2(m^2 - \mathbf{p}_{e+} \cdot \mathbf{p}_{e-}) \\ &\neq \mathbf{p}^2 \end{aligned}$$

二つ以上のフォトンに崩壊することに関しは矛盾が導かれないので起こる。さらに、生成フォトンが一つ増える毎にそれが起きる確率は結合定数  $\alpha$  だけ増加し、これはおよそ  $\frac{1}{137}$  なので高次の項は無視できる。よって、

p-Ps は二つ、o-Ps は三つのフォトンに崩壊すると考えられる。

なお、p-Ps は 511keV の  $\gamma$  線を放出する崩壊、o-Ps は運動量の総和が 0 になれば良いのでエネルギースペクトルが連続になる崩壊をする。

## 2.3 軌道角運動量が $l$ の場合

一つのフォトンの荷電パリティは式 (3) から -1 だから、 $n$  個のフォトンの荷電パリティは  $(-1)^n$  である。ポジトロニウムでの荷電共役変換は電子と陽電子の交換に等しく、それは重心周りの空間反転とみなせるから、空間反転における符号の変化を考えればよい。球面調和関数の性質より  $(-1)^l$  の因子、全スピンの  $S$  のとき  $(-1)^{S+1}$  の因子が生じる。さらに、相対論的な内部自由度から  $1 \times (-1)$  の因子がかかり、結果としてその積からポジトロニウムの荷電パリティは  $(-1)^{l+S}$  である。よって、 $l+S$  が偶数のときは偶数フォトン系、奇数のときは奇数フォトン系に崩壊すると結論できる。

## 2.4 S 行列の定義

Dirac 表示において

$$|\psi(t)\rangle_I \equiv U_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I \quad (13)$$

と表されるユニタリ演算子  $U_I(t, t_0)$  の表式を考える。(13) の両辺を微分して

$$i \frac{\partial U_I(t, t_0)}{\partial t} = H_{\text{int}}(t) U_I(t, t_0) \quad (14)$$

が得られる。ここで  $H_{\text{int}}$  は系のハミルトニアンを  $H = H_0 + H_{\text{int}}$  と自由粒子部分と相互作用部分に分けたときの相互作用部分を表す。この微分方程式 (14) を時間順序に注意して解くと

$$U_I(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_1} dt_n T H_{\text{int}}(t_1) \cdots H_{\text{int}}(t_n) \quad (15)$$

$$= T e^{(-i \int_{t_0}^t ds H_{\text{int}}(s))} \quad (16)$$

となる。

$$S \equiv U_I(-\infty, \infty) \quad (17)$$

と  $S$  を定義する。このとき、これを積分記号の中の  $H_{\text{int}}(t_k)$  の次数に応じて展開すると

$$S = \sum_k S^{(k)} \quad (18)$$

となることがわかる。

$$S_{fi} \equiv \langle f | S | i \rangle \quad (19)$$

が  $S$  行列である。但し、ここで  $|i\rangle$  は始状態、 $|f\rangle$  は終状態である。遷移確率は  $|S_{fi}|^2$  で与えられる。

## 2.5 寿命

不変散乱振幅  $\mathcal{M}_{fi}$  四元運動量保存より

$$\langle f | S | i \rangle = i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \mathcal{M}_{fi} \quad (20)$$

ここで現れる  $\mathcal{M}_{fi}$  を不変散乱振幅と呼ぶ。すると、以下の式が成立する。

$$|S_{fi}|^2 = |\langle f | S | i \rangle|^2 = |i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (21)$$

$\delta^4(P_f - P_i) \delta^4(P_f - P_i) = \delta^4(P_f - P_i) \delta^4(0)$  に注意すると、

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) [VT] |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (22)$$

となる。この  $\mathcal{M}_{fi}$  を用いて崩壊確率  $\Gamma$  について時間スケール  $T$  において

$$\frac{1}{T} \frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{|\mathbf{k}|^2}{32\pi^2 m^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (23)$$

が成立することが2体問題においてわかる。これを積分して  $\frac{\Gamma}{T}$  を求め、それを許される終状態について全て足し上げることによって寿命が計算される。これを数値的に計算すると、p-Ps が 0.12[ns]、o-Ps が 140[ns]。

### 3 実験

#### 3.1 実験原理

ポジトロニウムを形成するために、 $e^+$  を放出するものとして  $^{22}\text{Na}$  を、 $e^-$  を与えるものとしてシリカパウダーを用いる。まず  $^{22}\text{Na}$  により  $e^+$  が放出された後に、それをシリカパウダーに衝突させることによって  $e^+$  に  $e^-$  を与えてポジトロニウムを形成し、これが崩壊すると  $\gamma$  線を発する。今回は  $e^+$  が放出されてからシリカパウダーに到達するまでの時間と o-Ps の形成のための時間、そしてガンマ線が検出器に到達するまでの時間は o-Ps の寿命に比べ十分小さいものとして、( $\gamma$  線を検出した時間) - ( $e^+$  が放出された時間) をポジトロニウムの寿命と考えることによって、o-Ps の寿命を測定した。

#### 3.2 実験器具

- $^{22}\text{Na}$   
 $\beta^+$  崩壊により  $e^+$  を放出する線源。
- プラスチックシンチレータ (以下、P.S.)  
 $e^+$  が通過したときに信号を出す検出器。
- NaI シンチレータ (以下 NaI)  
 $\gamma$  線が通過したときに信号を出す検出器。
- シリカパウダー (主成分  $\text{SiO}_2$ )  
 $e^+$  に  $e^-$  を与えるためのもの。  $\text{SiO}_2$  は構造上  $e^-$  を多く含んでいるためにこのように用いることができる。
- 鉛ブロック  
 $^{22}\text{Na}$  から直接放出される  $\gamma$  線が NaI に入らないように NaI の周りを覆うためのもの。
- 遮光用ビニール  
P.S. に室内の光などが入り  $e^+$  の検出ができなくなるのを防ぐため装置全体を覆うためのもの。

#### 3.3 セットアップ

実験器具の配置は図1の模式図のように行った。実際の配置としては図2に蓋と遮光ビニールを外した状態を、図3に蓋をした状態と遮光ビニールで覆った状態を示す。実際に実験を行う時は遮光ビニールで覆った状態で行う。

図1の鉛ブロックの穴から  $e^+$  が通り抜け、シリカパウダーで o-Ps を生成し、周りを囲む NaI により o-Ps の崩壊を検出する。そのために  $^{22}\text{Na}$  は穴の直線上に中心がくるように置いた。シリカパウダーは容器内を真空にし、検出効率を最大化するためにできるだけ検出器の真ん中に配置されるように置いた。

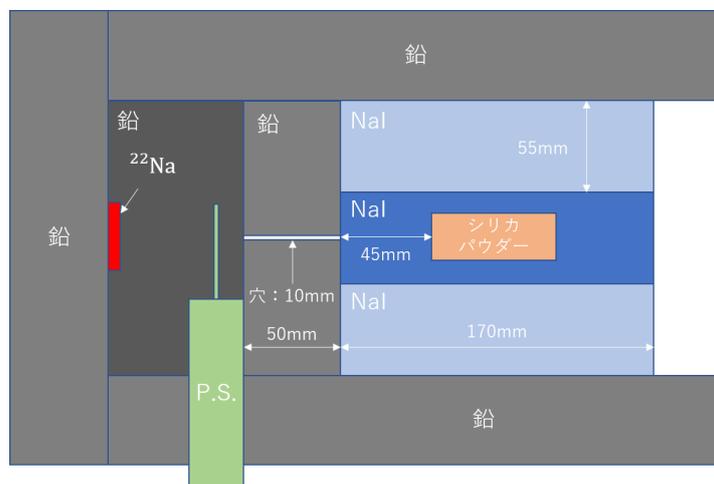


図1 セットアップの上から見た模式図



図2 実際の配置 (蓋と遮光ビニール無し)



図3 実際の配置 (蓋と遮光ビニール有り)

### 3.4 回路

Ps の寿命を測定することが目的である。

Ps が生成されたとき P.S. が  $e^+$  を感知する : Ps 生成時刻

Ps が崩壊したとき NaI が  $\gamma$  線を感じると : Ps 崩壊時刻

より、これらの時刻の差を測れる回路を組みたい。単純に組むと、図 4 のようになる。

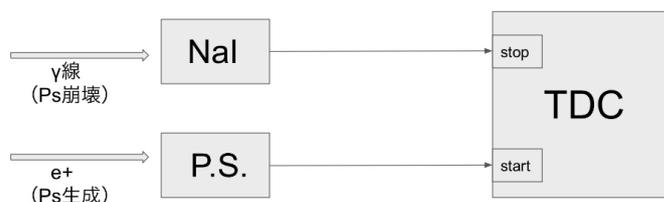


図 4 仮の回路

TDC は start に信号が入った時刻と stop に信号が入った時刻の差を測定することができ、これで Ps の寿命が測定できる。

しかしこれでは以下の問題点が出てくる。Ps 生成に無関係な  $\gamma$  線が生じたり、 $e^+$  が通過しても Ps を生成しなかったりということがあがるが、P.S. はこれも感知してしまう。この時、P.S. で start の信号が送られてしまうが Ps は生成されていないので Ps 崩壊による stop 信号は送られず、その後 Ps が生成され崩壊する時にやっと stop 信号が送られ、無意味な時間を記録してしまう。よって、P.S. , NaI のどちらもが感知した時のみ start 信号を送るようにしたい。

そこで改良した回路が図 5 である。

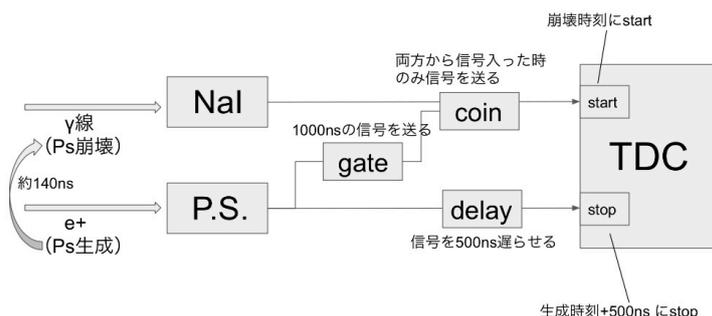


図 5 改良した回路

gate は、信号が入力されたとき事前に設定した長さの信号を出力する。ここでは 1000ns。

coincidence は、複数の入力端子の全てに信号が入力されているとき信号を出力する。

delay は、信号が入力されたとき事前に設定した時間だけ遅らせて信号を出力する。ここでは 500ns。

Ps が生成され P.S. が、 $e^+$  を感知して gate が 1000ns(寿命より十分に長い時間) の信号を coin に出力する。

するとその間に Ps が崩壊して NaI が  $\gamma$  線を検知して coin に出力。こうして 2 つの入力端子から入力されて初めて coin が信号を出力して、TDC の start に入力される。

P.S. からのもう一方の信号は delay に入力され、500ns(寿命より十分に長い時間) 経過してから TDC の stop に入力される。

時間経過は以下ようになる。(Ps の寿命を 140ns としたときの例。)

t=0ns : Ps 生成

t=140ns : Ps 崩壊,start 信号

t=500ns : stop 信号

このとき TDC は「360ns」と測定する。ここから  $500\text{ns} - 360\text{ns} = 140\text{ns}$  と寿命が求まる。

実際に組んだ回路は図 6 である。どの NaI が  $\gamma$  線を検出したかがわかるように TDC1,2,3 をとった。discriminator の threshold は、小さいエネルギーの  $e^+$ 、 $\gamma$  線も検出できるように小さく設定した。

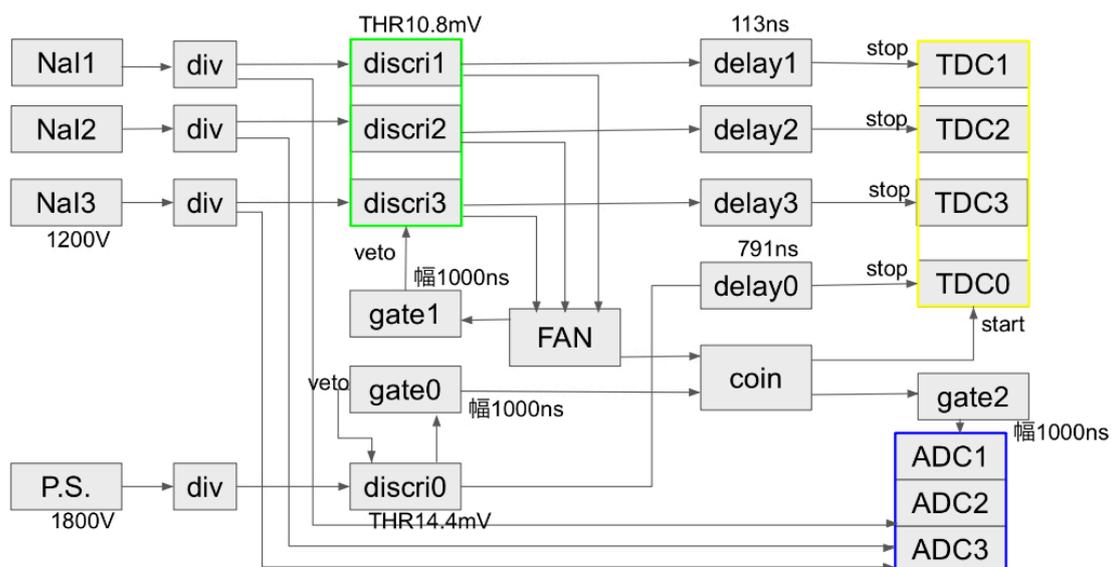


図 6 回路図の全容

図 6 中の記号の意味と機能は以下を見てほしい。

NaI NaI シンチレーター。

P.S. プラスチックシンチレーター。

TDC time to digital

converter. start に信号が入ってから stop に信号が入るまでの時間 (に比例した値) を返す。

coin coincidence. 複数の入力端子のすべてに信号が入力されているときに信号を出力する。

FAN 複数の入力端子のうち、いずれかの端子に信号が入力されているときに信号を出力する。

delay 設定した時間だけ信号を遅らせて出力する。

div divider. 入力された信号を 2 つに分ける。

discriminators. 入ってきたアナログ信号が threshold(図中で THR) より大きいとき、NIM 信号を出す。ただし、veto に信号が入っているとき信号を出力しない。

gate gate generator. 信号が入力されたとき、設定した時間幅の NIM 信号を出力する。

veto gate が信号を出力しているとき、gate に信号が入力されないようにする。

ADC analog to digital converter. 幅決めの gate が開いている間に入力されたアナログ信号の積分値 (に比例した値) を返す。

信号の概念図を図 7 に示した。

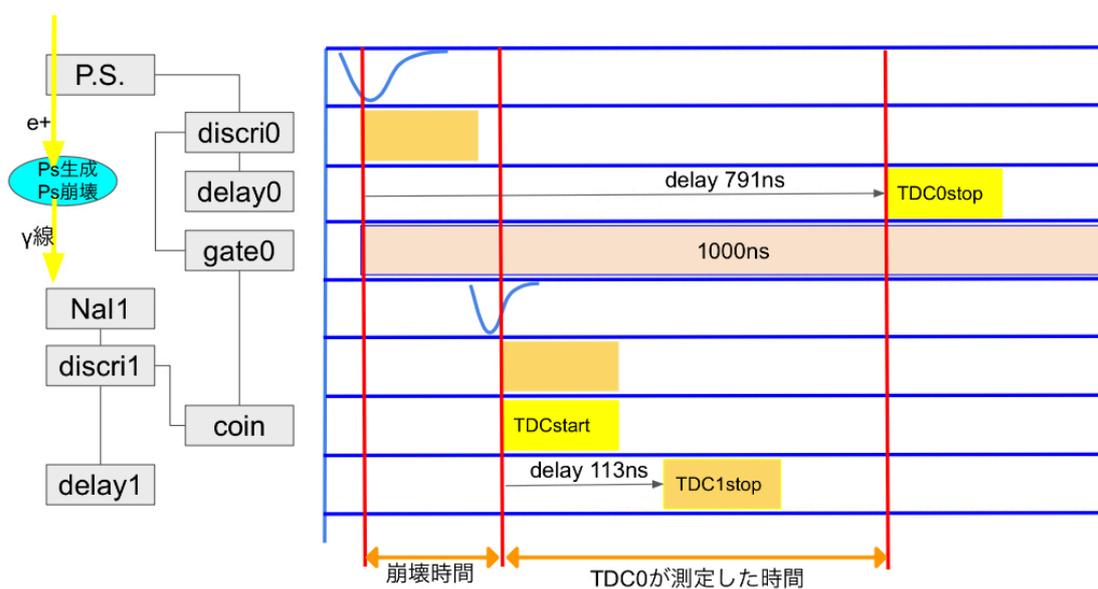


図 7 信号の概念図

## 4 解析

本実験では計測期間を前半と後半に分けた(表1参照)。前半データのうちCH2のデータが特異な挙動を示したため、 $^{22}\text{Na}$  から直接 NaI に放射線が入射した可能性を考慮し、後半では P.S. と  $^{22}\text{Na}$  との距離を離れた。TDC と ADC の生データを図8と図9に記載する。

表1 実験データ概要

区分	期間	イベント数	P.S.- $^{22}\text{Na}$ 間距離
前半	2020/2/10 2020/2/25	1,529,653	3cm
後半	2020/2/25 2020/3/23	635,653	5cm

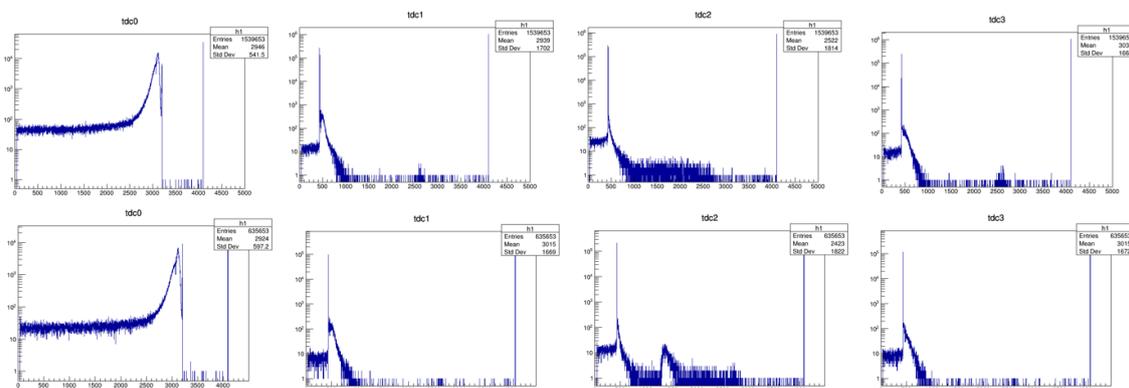


図8 TDC の生データ。上段が前半、下段が後半データ。左列から CH0、CH1、CH2、CH3。縦軸がカウント数、横軸が TDC 値。

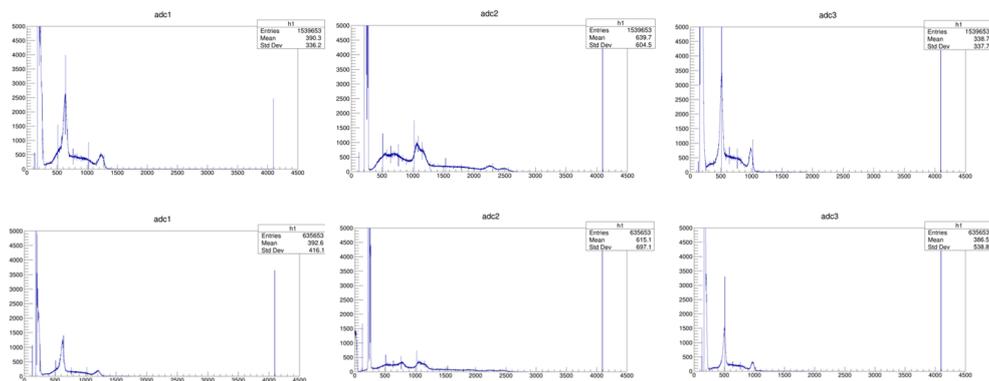


図9 ADC の生データ。上段が前半、下段が後半データ。左列から CH1、CH2、CH3。縦軸がカウント数、横軸が ADC 値。

## 4.1 データ処理

### 4.1.1 TDC 較正

TDC は START 信号から STOP 信号が入るまでの時間に比例する整数値 (0 から 4095) を返す。今回の実験は具体的にポジトロニウムの寿命を測定する事が目的なので、実験を行う前に整数値と実際の時間との対応関係を求めておく必要がある。寿命の測定に関わるのは TDC0 だけなので、TDC0 のみ較正を行った。

TDC 較正に用いた回路を図 10 に示す。まず、クロックジェネレーターで信号を作り、ディレイを挟み、その信号を TDC0 とオシロスコープのそれぞれに入力した。その後、オシロスコープで信号の時間差を目視で測定し、TDC0 の整数値と実際の時間との対応を調べた。ディレイの値を変えたときの実際の時間と TDC0 の整数値の対応関係を表 2 に記載する。

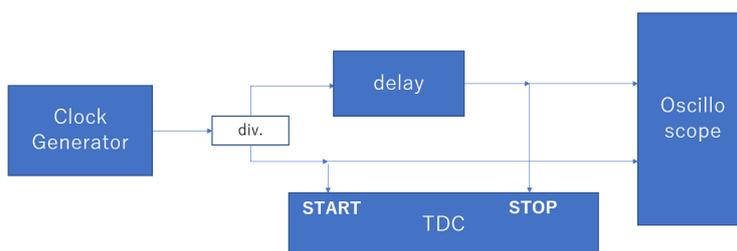


図 10 TDC 較正に用いた回路

表 2 実際の時間と TDC0 値の対応関係

時間 [ns]	TDC0 値
1	$6.32 \times 10^2 \pm 1.48 \times 10^{-2}$
10	$1.01 \times 10^2 \pm 1.86 \times 10^{-2}$
18	$1.32 \times 10^2 \pm 1.89 \times 10^{-1}$
25	$1.62 \times 10^2 \pm 1.72 \times 10^{-2}$
32	$1.89 \times 10^2 \pm 1.61 \times 10^{-2}$

得られたデータを線形関数でフィッティングしたところ、傾きは  $2.46 \times 10^{-1} \pm 3.88 \times 10^{-5}$  と得られた (図 11 参照)。TDC0 較正関数を構成するにあたって、今回の実験では崩壊時間の大小と TDC 値の大小との関係が逆になっている事から、傾きは負にする。切片は寿命の測定には直接関係しないが、TDC0=4095 の時 (STOP 信号が無かったとき) に時間 [ns]=0 となるように対応させると、TDC0 較正関数は以下の様になった：

$$\text{time[ns]} = 1006 - 0.246 \times \text{TDC0} \quad (24)$$

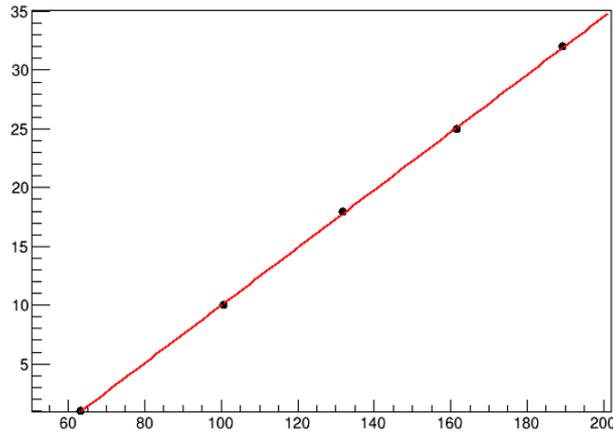


図 11 表 11 をプロットした図。縦軸が時間 [ns]、横軸が TDC0 値。

#### 4.1.2 ADC 較正

ADC も TDC と同様に、整数値を実際の値 [keV] に対応させる必要がある。以下、ADC 較正の手順を説明する。 $^{22}\text{Na}$  は 511keV と 1275keV のガンマ線を放出し、そのピークと思われるものが図 9 に現れている。これら 2 つのピークをガウス関数でフィッティングすることで、整数値とエネルギー [keV] との対応関係が得られる\*1。最後に 2 点を線形関数でフィットして、ADC 較正関数を構成する。表 3 にフィッティングの結果を示す。ただし、ADC2 については目立ったピークが見えずフィッティング不可能だった。

表 3 線形関数  $\text{Energy}[\text{keV}] = p_0 + p_1 \times \text{ADC 値}$  でフィッティングした結果

	$p_0$	$p_1$
前半 ADC1	$-2.98 \times 10^2 \pm 2.31$	$1.28 \pm 2.36 \times 10^{-3}$
前半 ADC2	—	—
前半 ADC3	$-2.98 \times 10^2 \pm 5.59 \times 10^{-1}$	$1.59 \pm 1.01 \times 10^{-3}$
後半 ADC1	$-3.20 \times 10^2 \pm 8.40 \times 10^{-1}$	$1.34 \pm 1.18 \times 10^{-3}$
後半 ADC2	—	—
後半 ADC3	$-3.04 \times 10^2 \pm 5.81 \times 10^{-1}$	$1.63 \pm 1.01 \times 10^{-3}$

#### 4.1.3 データ抽出

較正を行ったデータから、以下の条件を満たすものは、今回の寿命測定で使用すべきでないので除外する。

- CH2 のデータ (ヒストグラムがおかしいため)
- 注目する CH の TDC 値が一定の範囲内に収まっていないもの (NaI が鳴っていない時は TDC の値が 4095 となるため)

\*1 本来は別の実験で  $^{22}\text{Na}$  のエネルギーを鉛ブロックを通さず直接測定するべきだが、今回の実験においてエネルギーの値は寿命の値に影響しないので楽な方法選択した。

表 4 データ抽出条件

	NaI1	NaI3
TDC0	<4095	<4095
TDC1	420 から 440	
TDC3		420 から 440

- TDC0 の値が 4095 であるもの (どの NaI もなっていない、または崩壊時間が遅すぎるため)

具体的な条件は以下の表 4 に記載する。また、較正と抽出を経たデータを図 12 に記載した。

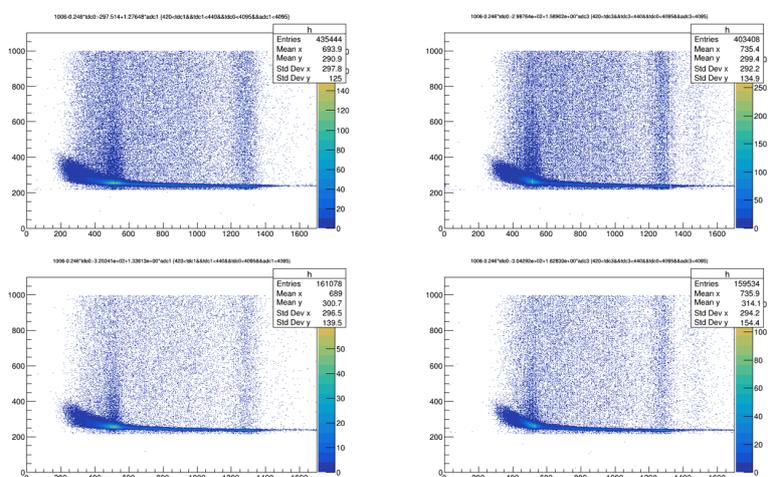


図 12 較正・抽出済みのデータ。上段が前半、下段が後半データ。左列が NaI1、右列が NaI3。縦軸が時間 [ns]、横軸がエネルギー [keV]。

## 4.2 TQ 補正

図 12 を見ると、若干ではあるがエネルギーが 500keV 以下の部分でデータが左上がりになっているのが見て取れる。この原因は discriminator がしきい値 (threshold) を越えた時にのみ信号を出力することにある。図 13 のように、低エネルギーの信号ほどしきい値を超えるのが遅れ、その結果、実際よりも時間が大きい値となる。これはポジトロニウムの寿命の値に直接影響するので、エネルギーの全区間でポジトロニウムの発生時刻が時間=0ns となるように補正する必要がある。

### 4.2.1 TQ 補正の方法

図 12 を見ると、時間=300[ns] のあたりにピークが見られる。このピークは崩壊時間が o-Ps(計算値 140[ns]) より遙かに短い p-Ps(計算値 0.12[ns]) のものである。したがって、この p-Ps のピークを時間=0[ns] として補正すれば十分である。

まず、補正に用いるデータを作成する。図 12 を 20[keV] ずつで区切り、そのピークをガウス関数でフィッティングし、mean の値をそのエネルギー区間での代表値とする (図 14 参照)。

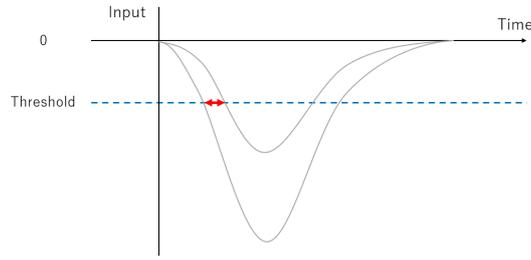


図 13 discriminator の動作の概要図。エネルギーの小さい信号ほど検出が遅れる。

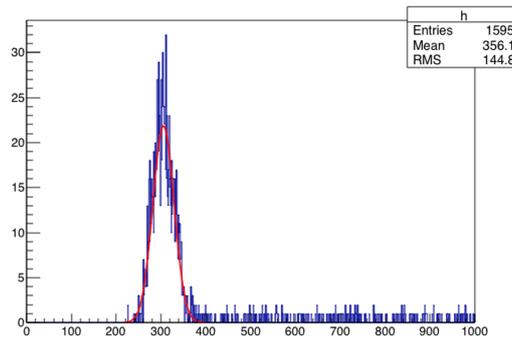


図 14 ガウス関数でフィッティングする様子。縦軸がカウント数、横軸が時間 [ns]。ピークが p-Ps の崩壊時間に対応する。

次に、得られたデータをフィッティングする関数を構成する。図 15 のように信号を三角形で近似することでフィッティング関数を見定める。

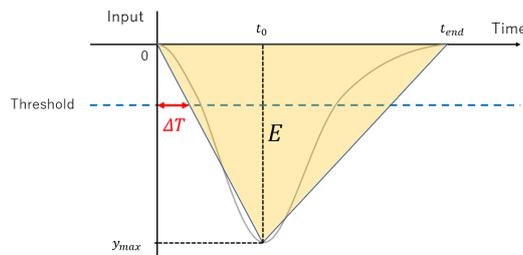


図 15 discriminator に入力される信号の三角形による近似

今の目的は、図 15 における  $\Delta T$  をエネルギーの関数化することである。信号のピークの時刻  $t_0$  と信号の終了時刻  $t_{end}$  はエネルギー  $E$  に依らない定数と仮定する。エネルギー  $E$  は三角形の全面積なので、

$$E = \frac{t_{end} \times y_{max}}{2} \quad (25)$$

となる。これより、信号の遅れ  $\Delta T$  は、

$$\Delta T = t_0 \frac{\text{Threshold}}{y_{max}} = t_0 \frac{\text{Threshold} \times t_{end}}{2E} \propto \frac{1}{E} \quad (26)$$

とエネルギーに反比例すると予想される。これは大雑把な近似なので、実際に使用する補正関数は、

表 5 TQ 補正関数の式 27 のフィッティングパラメータ

	$p_0$	$p_1$	$p_2$
前半 NaI1	$1.02 \times 10^6 \pm 2.11 \times 10^5$	$1.69 \pm 3.84 \times 10^{-2}$	$2.33 \times 10^2 \pm 6.89 \times 10^{-1}$
前半 NaI3	$9.11 \times 10^6 \pm 2.11 \times 10^5$	$1.58 \pm 8.56 \times 10^{-2}$	$2.23 \times 10^2 \pm 2.56$
後半 NaI1	$1.55 \times 10^6 \pm 4.12 \times 10^5$	$1.74 \pm 4.92 \times 10^{-2}$	$2.31 \times 10^2 \pm 1.05$
後半 NaI3	$3.79 \times 10^6 \pm 4.48 \times 10^5$	$1.80 \pm 2.25 \times 10^{-2}$	$2.23 \times 10^2 \pm 1.02$

$$\Delta T(E) = \frac{p_0}{E^{p_1}} + p_2 \quad (27)$$

とした。

#### 4.2.2 TQ 補正の結果

上記の方法で実際にフィッティングを行う様子を図 16 に、その結果を表 5 に記載する。

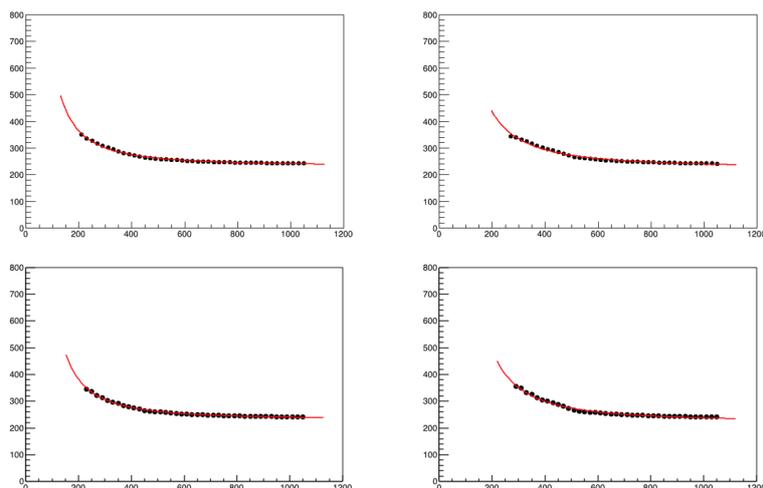


図 16 p-Ps のピークに対応する点を 27 でフィッティングする様子。上段が前半、下段が後半データ。左列が NaI1、右列が NaI3。縦軸が時間 [ns]、横軸がエネルギー [keV]。

以上より、各エネルギーにおける時刻 0[ns] の点からのズレ  $\Delta T$  を求める事が出来た。図 12 から  $\Delta T$  の値を引いてプロットしたものを図 17 に記載する。

#### 4.2.3 o-Ps の寿命 (TQ 補正後)

図??のデータを用いて o-Ps の寿命を求める。寿命の計算に用いるデータの範囲は、エネルギーについては o-Ps 崩壊後の  $\gamma$  線のエネルギーが 511keV 以下であることから 400keV 以下、時間については p-Ps のデータが混じらないようある程度時間の値が大きい領域とする。そうして得られた o-Ps の割合が多いデータを縦軸をイベント数、横軸を時間 [ns] としてプロットし、下記の式 28 でフィッティングすると、パラメータ  $p_1$  が寿命の実験値として求まる：

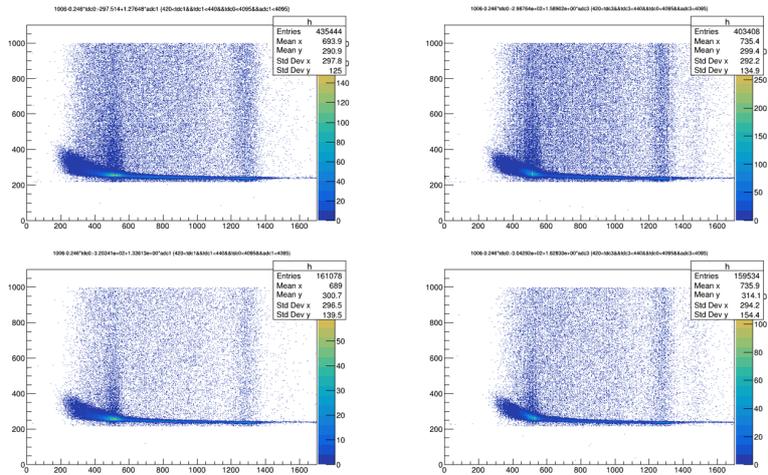


図 17 較正・抽出・TQ補正済みのデータ。上段が前半、下段が後半データ。左列が NaI1、右列が NaI3。縦軸が時間 [ns]、横軸がエネルギー [keV]。

$$\text{Count} = p_0 \exp\left(-\frac{\text{Time}}{p_1} + p_2\right) \quad (28)$$

フィッティングを行う様子を図 18 に、その結果を表 18 に記載する。表 6 を見ると、誤差が大きく、寿命の値は理論値の 140ns より小さく出ている。

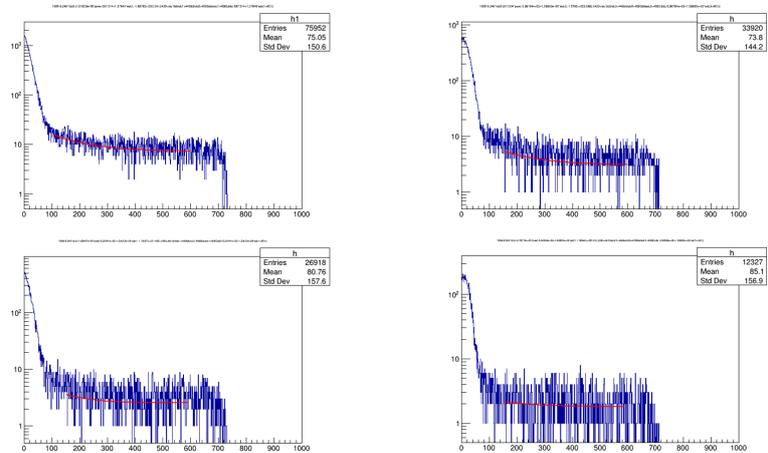


図 18 o-Ps の割合が多いデータをフィッティングする様子。上段が前半、下段が後半データ。左列が NaI1、右列が NaI3。縦軸がカウント数、横軸が時間 [ns]。

### 4.3 pick-off 補正

#### 4.3.1 Ps の起こす相互作用

Ps は以下のような反応を物質中で起こす

1. pick-off 反応: Ps 内の陽電子が物質中の電子と反応し  $2\gamma$  に崩壊する。

表 6 o-Ps の寿命の実験値 (TQ 補正後)

	寿命 $p_1$ [ns]
前半 ADC1	$1.15 \times 10^2 \pm 1.95 \times 10$
前半 ADC3	$1.23 \times 10^2 \pm 5.26 \times 10$
後半 ADC1	$8.65 \times 10^2 \pm 7.57 \times 10$
後半 ADC3	$1.16 \times 10^2 \pm 3.07 \times 10^2$

2. スピン交換反応:Ps 内の電子が周囲の電子とスピン交換をし、o-Ps と p-Ps を移り変わる。

3. 化学反応:水素原子に構造が似ているため、化学反応が起きる。

これらの反応は o-Ps が結果的に  $3\gamma$  に崩壊する可能性を示唆するので、これを除かなければならない。但し、p-Ps に関しては生成されたら直ちに崩壊するので o-Ps の寿命測定という目的においては結果に影響を与えない。更に、厳密には先の 1 の例のみを pick-off 反応と言うが、今回はこのような o-Ps が  $2\gamma$  に結果的に崩壊する反応に対する補正を総して pick-off 補正と呼ぶことにする。

#### 4.3.2 崩壊幅

崩壊幅は単位時間当たりに粒子が崩壊する確率として定義される  $\Gamma$  を観測される崩壊幅、 $\Gamma_o$  を o-Ps の崩壊幅、先のような反応による崩壊幅を  $\Gamma_{po}$  とすると、

$$\Gamma = \Gamma_o + \Gamma_{po} \quad (29)$$

と表される。ここで、o-Ps の寿命  $\tau$  は

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_o} \quad (30)$$

で表されることに注意する。

#### 4.3.3 pick-off 補正関数の導出

図 19 での赤色の部分は pick-off 反応による 511keV の  $\gamma$  線の Compton 散乱と o-Ps の  $3\gamma$  への崩壊が混ざっているので前者を取り除かねばならない。各時刻において 511keV のピークと Compton 散乱のみを取り出したデータは相似であるとする。つまり、時刻 0 ではほぼ p-Ps しかいないのでここでの分布を調べ、それを差し引くことによって o-Ps の崩壊をデータから抽出出来ると仮定する。

pick-off 補正関数  $g(t)$  を

$$g(t) = \frac{\Gamma_{po}}{\Gamma_o} = \frac{\Delta N_{po}(t)}{\Delta N_o(t)} \quad (31)$$

で定義する。ここで、 $\Delta N_o(t)$  と  $\Delta N_{po}(t)$  はそれぞれ時刻  $t$  における o-Ps の低エネルギー領域での検出数、相互作用由来の Compton 散乱に関する検出数である。 $N(t)$  の満たす微分方程式が

$$\frac{dN(t)}{dt} = -(\Gamma_o + \Gamma_{po})N(t) = \frac{1+g(t)}{\tau}N(t) \quad (32)$$

なので、これを解くと

$$N(t) = N_0 e^{\frac{1}{\tau} \int^t ds(1+g(s))} \quad (33)$$

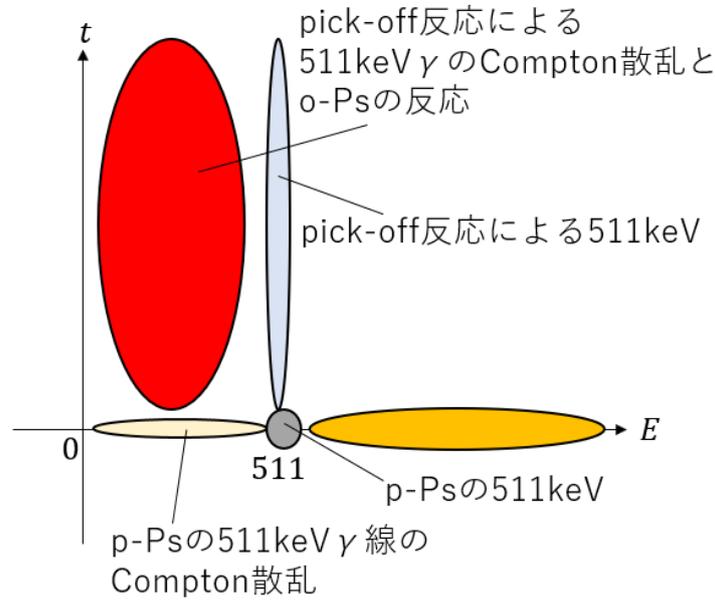


図 19 領域ごとの主な反応

となる。一定時間に崩壊する o-Ps の数はこれを微分して

$$-\frac{dN(t)}{dt} = n_0(1 + g(t))e^{-\frac{1}{\tau} \int^t ds(1+g(s))} \quad (34)$$

と求まる。これの実際のフィッティング関数  $f(t)$  は、例年に倣って  $g(t)$  のフィッティング関数を  $g(t) = p_0 + p_1 e^{\frac{t}{p_2}}$  とおき、またフィッティングのための定数  $q_0$  を加えることにより

$$-\frac{dN(t)}{dt} = f(t) = q_0 + q_1(1 + p_0 + p_1 e^{\frac{t}{p_2}})e^{\frac{(1+p_0)t + p_1 p_2 e^{\frac{t}{p_2}}}{q_2}} \quad (35)$$

となる。 $-q_2$  が寿命である。

また、 $g(t)$  はデータから以下のようにして導出される。相似の仮定より

$$\Delta N_{po}(t) = \frac{y(t)S(0)}{y(0)} \quad (36)$$

ここで、 $y(t)$  と  $S(t)$  はそれぞれ時刻  $t$  における 511keV のピークの高さと低エネルギー領域 (450keV 以下) でのイベント数である。これより

$$g(t) = \frac{\Delta N_{po}(t)}{\Delta N_o(t)} = \frac{\Delta N_{po}(t)}{S(t) - \Delta N_{po}(t)} = \frac{y(t)S(0)}{y(0)S(t) - y(t)S(0)} \quad (37)$$

また、時刻  $t$  は次のように定義する。単位は全て ns である。

1.  $[t - 25, t + 25]$  の範囲のデータは時刻  $t$  である。
2. 解析の対象は  $t = 100 + 50n$  ( $0 \leq n \leq 8, n \in \mathbb{Z}$ )

表7 フィッティングパラメータ

	NaI1(1回目)	NaI3(1回目)	NaI1(2回目)	NaI3(2回目)
$p_0$	-0.0721633	0.210396	0.363989	0.191812
$p_1$	1.87891	1.52439	1.45675	0.710317
$p_2$	-332.715	-188.306	-159.824	-219.167
$q_0$	80.9486±12.8148	36.4188±10.4050	88.3911±4.04460	55.2563±2.54737
$q_1$	17.8389±8.49105	23.8172±4.11307	51.3911±8.24552	20.5411±11.7406
$-q_2$ (寿命)	453.676±348.498	393.644±385.432	194.401±55.4636	107.178±75.2429

#### 4.3.4 データ処理

実際の pick-off 補正では、図 20 のように 511keV のピークを Gauss fitting して高さを取り出した。それを使って作った pick-off 補正関数のデータを先に示した通り  $g(t) = p_0 + p_1 e^{\frac{t}{p_2}}$  でフィッティングした。その結果 pick-off 補正関数は図 21 のようになった。ただし、1 回目の実験のデータに関しては次章で後述する考察内容を理由に低崩壊時間の領域のデータを除いて補正し、図 22 となったものを採用した。また、縦軸エントリー数、横軸時間のヒストグラムに対し、先述した

$$f(t) = q_0 + q_1(1 + p_0 + p_1 e^{\frac{t}{p_2}}) e^{\frac{(1+p_0)t + p_1 p_2 e^{\frac{t}{p_2}}}{q_2}} \quad (38)$$

でフィッティングを行った様子を図 23 に示す。こうして得られたフィッティングパラメータを表 7 に示す。

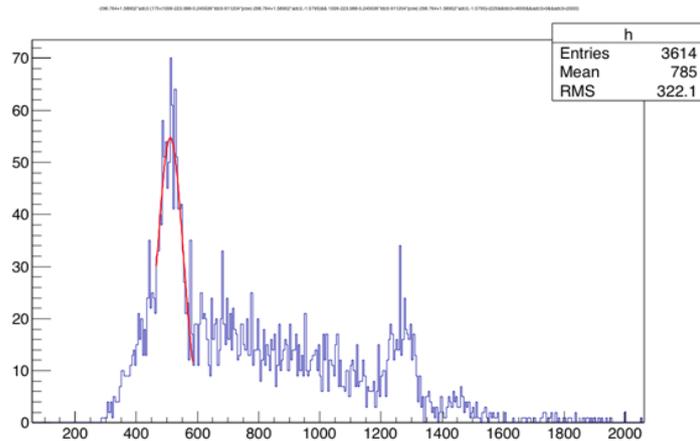


図 20 511keV のピークの高さ (1 回目の実験の NaI1 のデータの 175ns < t < 225ns を用いたもの)

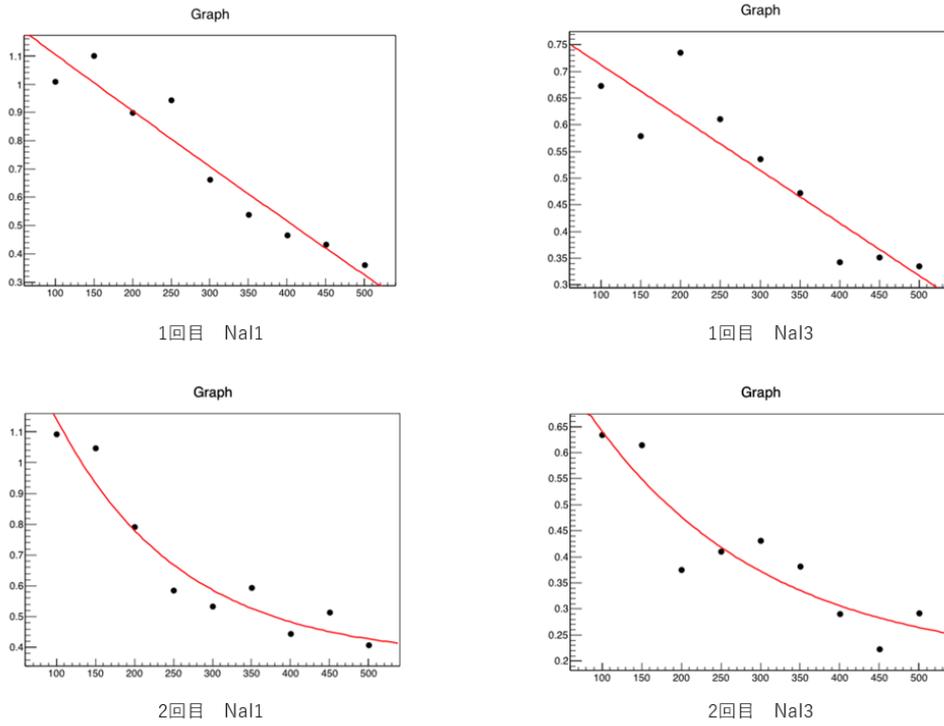


図 21 各実験における pickoff 補正関数。1 回目の実験ではほとんど線形になってしまっている。

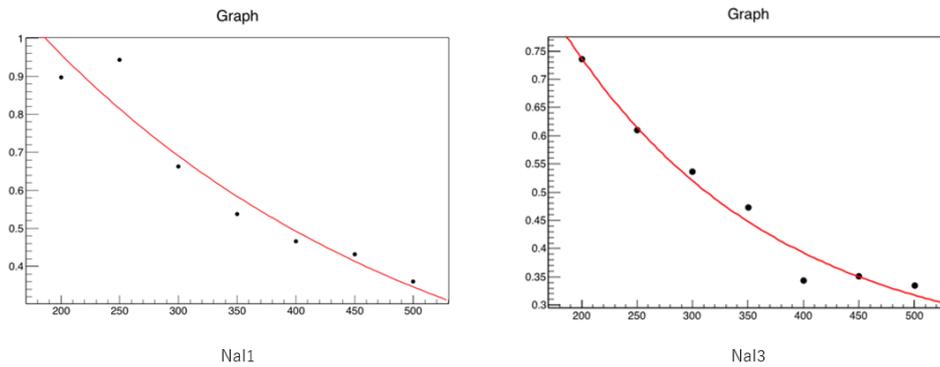
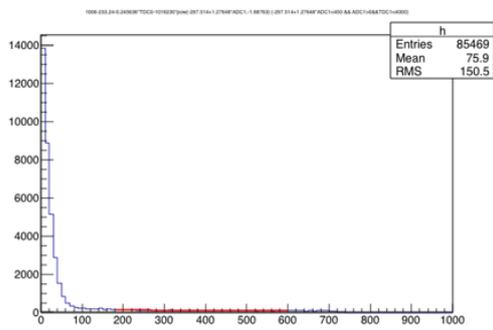
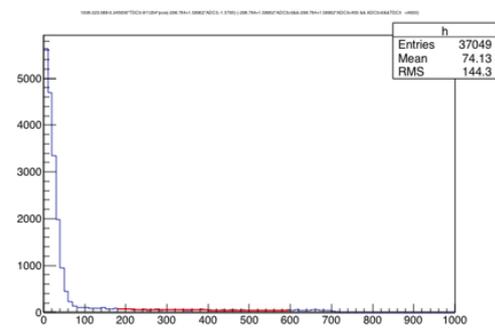


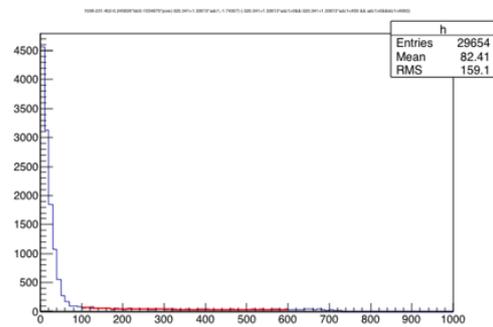
図 22 1 回目の実験で低時間領域を除いたもの



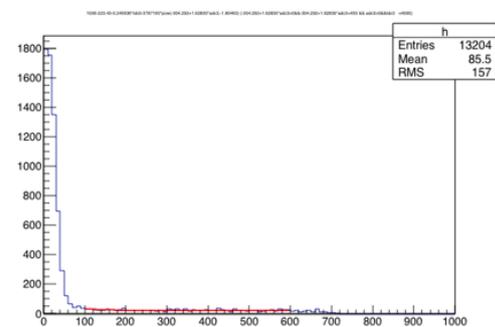
1回目 NaI1



1回目 NaI3



2回目 NaI1



2回目 NaI3

図 23 時間ヒストグラムのフィッティング

## 5 考察

### 5.1 イベント数

結果として求めた寿命の誤差のオーダーは、測定値のオーダーと同じかそれより一つ桁が小さいという非常に大きなものとなってしまった。その大きな原因としてデータ数が少なかったことが挙げられる。すなわち統計誤差が今回の誤差に大きく影響していると思われる。

そう考えられる理由としては、図 24 に示すように今回の実験では過去に A2 で行われた実験に比べ 200keV 以下のエネルギー領域におけるデータ数が非常に少なくなっていたことが挙げられる。全体のイベント数としては過去の実験と比較しても問題がないので、高エネルギー領域にイベントが偏っていたということになる。寿命の測定に用いたのは主に 450keV 以下の低エネルギー領域のデータであったので、今回欠損してしまった 200keV 以下の領域のイベント数は結果の精度に直結する。これにより、全体のエントリー数は問題がないのにも関わらず統計誤差が大きくなってしまったと思われる。尚、今回は NaI1,3 双方で低エネルギーでのイベントがとれていないのだが、2019 年前期のデータでは NaI1 で取られたデータが最も低エネルギー領域でのイベントが多く、NaI2,3 では今回と似たような状況になっていた。しかし、それでも今回の方が低エネルギーでのイベント数は少なくなっている。

2019 前期の実験に比べ threshold や電圧の高さはさほど変わっていないが、目立って違いがあるのは 2019 前期ではシリカパウダーを加熱し水分を飛ばしていたのに対し今回はその工程を省略し、また今回はシリカパウダーを容器に詰められるだけ詰めたことである。水分を飛ばす工程は pick-off 反応を軽減するためのものであるので、これを省略したことで pick-off 反応による 511keV 周りの反応が多くなり、o-Ps の崩壊の反応数が減少してしまった可能性がある。よって低エネルギー領域のデータ数の減少の原因としては、「単純に検出器の低エネルギー領域での検出精度が低くなってしまった可能性」、「シリカパウダーの含む水分や高密度のシリカパウダー自身が何らかの理由で低エネルギーガンマ線の放出を妨害した可能性」、そして先ほど挙げた「pick-off 反応ばかりが起こってしまった可能性」が考えられる。

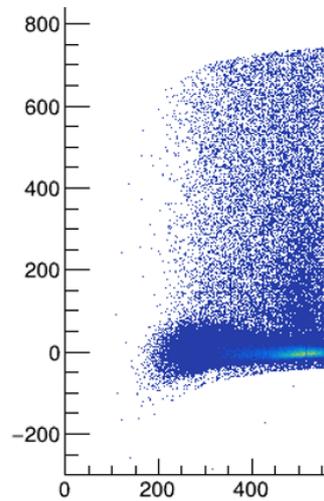
### 5.2 pick-off 補正関数

1 回目の実験における pick-off 補正関数を求める過程で  $t = 100\text{ns}$ ,  $150\text{ns}$  のデータを捨ててフィッティングを行った。この理由について述べておく。

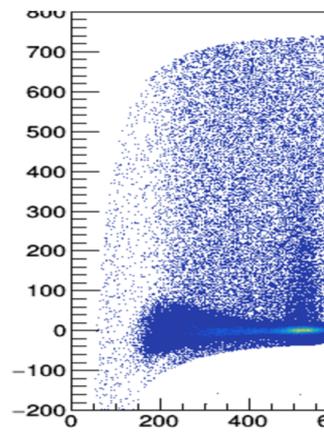
まず、pick-off 補正関数の式は

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{y(t)S(0)}{y(0)S(t) - y(t)S(0)} \\ &= \frac{1}{y(0)S(t)/y(t)S(0) - 1} \end{aligned} \quad (39)$$

である。データの低エネルギー領域の取り方にピークの高さ  $y$  依存しないが、低エネルギーのエントリー総数  $S$  は依存するので、すなわち定義された低エネルギー領域における時刻  $t$  におけるエントリー数が不当に大きいと  $g$  が小さくなるということになる。この  $S$  は 511keV のガンマ線を直接観測したものを除くべきなので、511keV ガンマ線のエントリーが測定誤差により広がった部分をできるだけ取り除いたほうがよい。ゆえに十分低いエネルギー領域のデータを解析するべきであり、エネルギー領域を広くとりすぎると  $S(t)$  が不当に大きくなりすぎてしまう可能性が考えられる。そして、1 回目の実験データを用いて計算した pick-off 補正関数



[1] 今回の NaI1 のデータ (全 435444 エントリー)

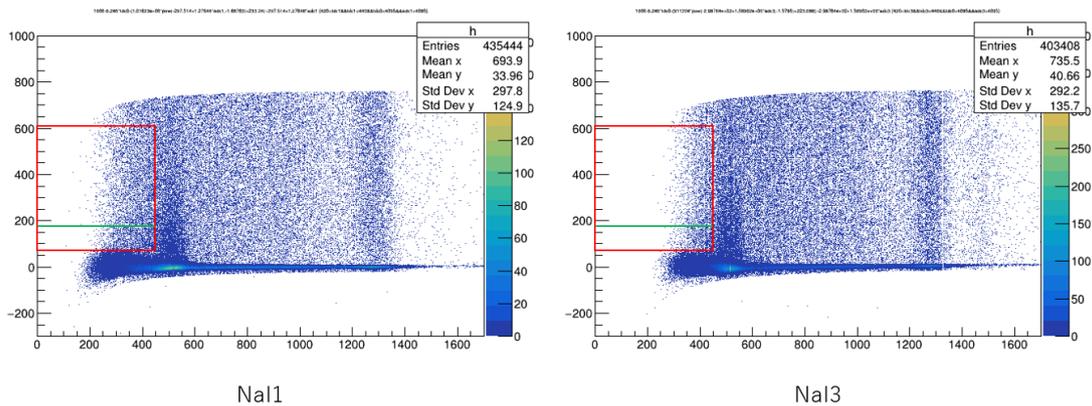


[2] 2019 年前期の NaI1 のデータ (全 382452 エントリー)

図 24 今回のデータと 2019 年前期の実験のデータの比較。横軸がエネルギー [keV], 縦軸が時間 [ns] である。今回は 200keV 付近以下の領域のデータ数が少なくなっていることが分かる。

の値が 2 回目の実験データを用いたものに比べ低時間領域で不自然に低くなっているように思われたことから、実際に 1 回目の実験の最初の解析で  $S(t)$  が不当に大きくなっていてのではないかと我々は予測した。

さて、ここで今一度 TQ 補正後のデータを見てみる。図 25、図 26 にそれぞれ 1 回目、2 回目の実験データを、pick-off 補正に使用した領域とともに示した。これをよく見ると、1 回目の実験のデータの方は、緑色の



赤枠：当初とっていた範囲  
緑線：これ以下のデータを切り落とした

図 25 1 回目の実験のデータ

線より下の右端の部分で 511keV の周辺の密集したエントリーが含まれているように見える。他方、2 回目の実験のデータの方はそういったものはほとんど見られない。これを理由として、1 回目の実験データに関して

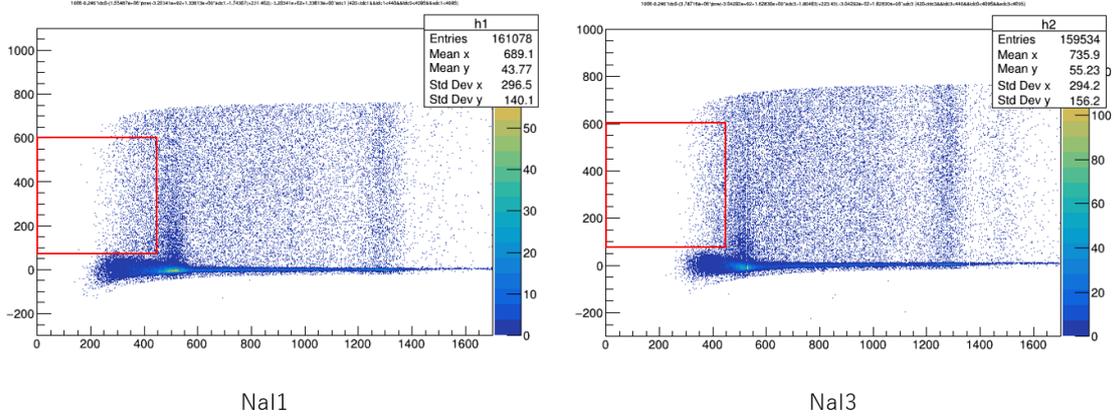


図 26 2 回目の実験のデータ

は緑色の線より下の領域を除いてフィッティングし直した。その結果、pick-off 補正関数のは期待されるように指数関数型でフィッティングすることができた。しかしこれによりイベント数はより減ることになり、誤差は拡大したと考えられる。

### 5.3 全データを用いた寿命の平均

まず、加重平均についての一般論を述べる。 $i$  番目の測定値  $x_i$  に対し誤差  $\sigma_i$  があるときに重み  $w_i = 1/\sigma_i^2$  を考えると、最適値  $x$  は

$$x = \frac{\sum_i w_i x_i}{\sum_j w_j} \quad (40)$$

となる。また、これに対する誤差  $\Delta$  は、測定値の数  $n$  を用いて、

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum_i w_i \delta_i^2}{(n-1) \sum_j w_j}} \quad (41)$$

となる。ここに、 $\delta_i = x_i - x$  である。この各測定値として表 7 に与えられた寿命を用いると、寿命の最適値は

$$\tau = 171.221 \pm 34.9102 \text{ ns} \quad (42)$$

となった。理論値は約 140ns であることを考えると、これは妥当な結果であると考えられる。

結論として、測定された寿命と理論値との誤差の範囲内での一致により、精度は高いとは言えないが QED の検証をすることができたと考えられる。ただし、各補正において大胆な近似もいくつか行っているため、この結果の信頼度については考察の未だ考察の余地がありそうだと考えられる。

## 6 謝辞

今回の実験をするにあたり、半期を通して丁寧に指導してくださった木川達也さん、そして実験の手助けや解析の助言をしてくださった TA の谷真央さんに感謝申し上げます。

## 7 参考文献

### 参考文献

[1] 過去の A2 レポート, <https://www-he.scphys.kyoto-u.ac.jp/gakubu/a1a2.html>