

# コンプトン散乱

課題演習A1

原田祥仁 橋本朔 田中達也 鈴木洋介 小橋川睦貴

# 目次

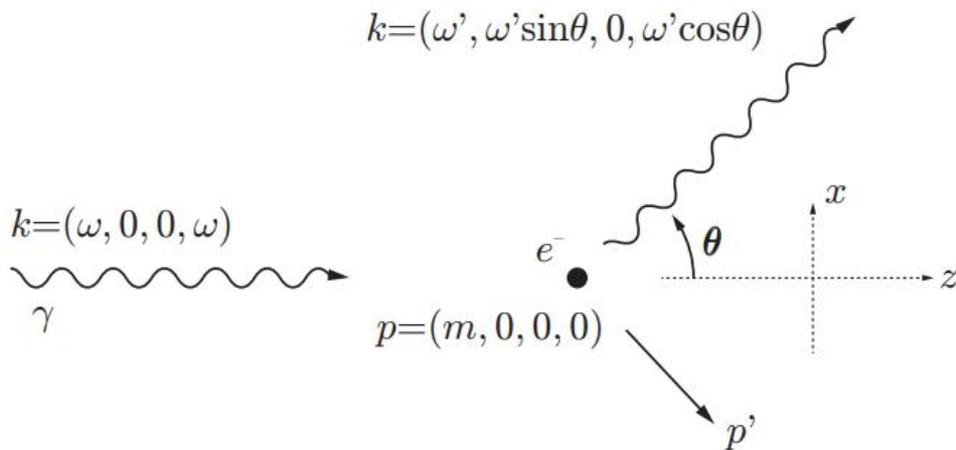
1. 実験目的とその背景
2. 理論
3. 実験方法
4. 実験結果・解析
5. 考察
6. 結論

# 実験目的とその背景

## 背景

コンプトン散乱とは,,,

X線(光)が電子により散乱する際、散乱光の振動数が減少する現象  
(古典力学では説明できない)



## 背景

量子力学では、光は粒子としての性質を持ち(光子と呼ぶ)、  
光子のエネルギーと運動量を、

$$E = \hbar\omega$$

$$p = \hbar k$$

として電子と光子の衝突問題と考える。

## 実験目的

今実験は、

- ・コンプトン散乱の散乱角によるエネルギー分布を理論値と 実測値を比較する
- ・それぞれの角度におけるコンプトン散乱の反応頻度を微分 散乱断面積と比較する

ことで、光の粒子性(量子力学の正当性)を検証する。

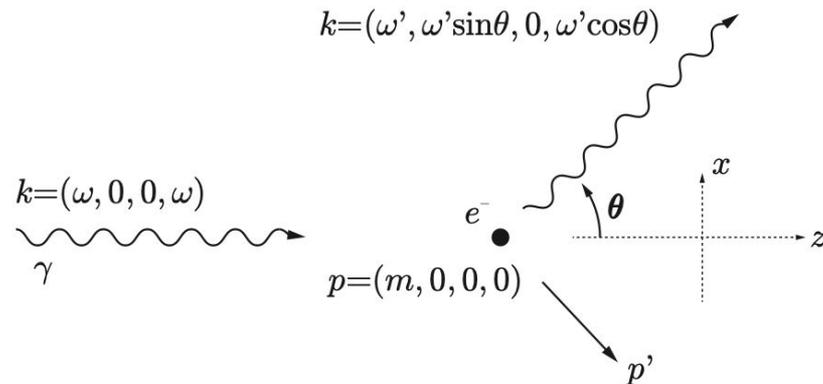
理論

## エネルギーと散乱角の関係

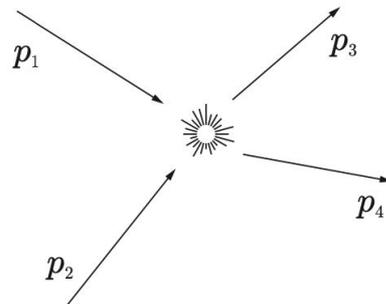
エネルギー-運動量の保存:  $p + k = p' + k'$

→  $p^2 = m^2$ ,  $k^2 = k'^2 = 0$  に注意して計算

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)}$$



## 微分散乱断面積: Klein-Nishinaの式



一般的な二体散乱過程の散乱断面積(via 場の理論):

$$\sigma = \frac{1}{2E_1 2E_2 v_{12}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_3} \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |\mathcal{M}|^2$$

$\mathcal{M}$  は不変散乱振幅  $\rightarrow$  Feynman則から計算

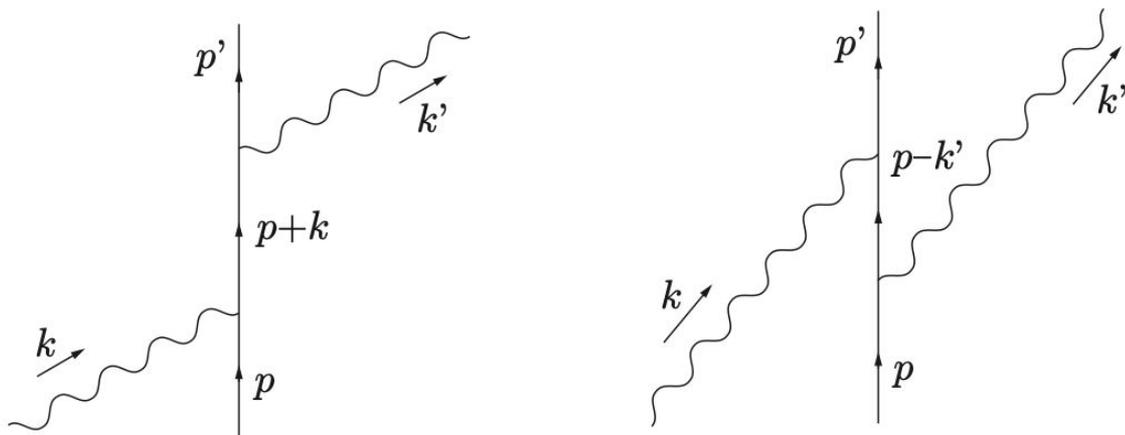
実験室系でのCompton散乱では

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 m} \left( \frac{\tilde{\omega}}{\omega} \right)^2 \times |\mathcal{M}|^2$$

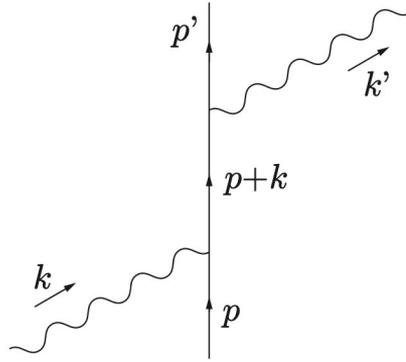
# 微分散乱断面積: Klein-Nishinaの式

$\mathcal{M}$  をFeynman則から求める

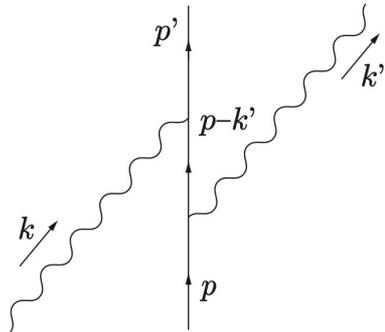
Compton散乱の最低次は2次&2次のダイアグラムは2つ



# 微分散乱断面積：Klein-Nishinaの式

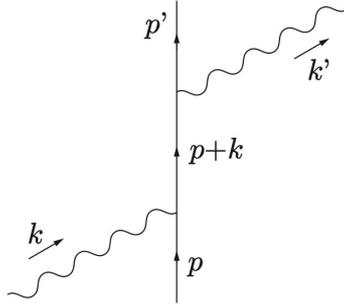


$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= e^2 \bar{u}(p') \not{\epsilon}'(k') \frac{m + \not{p} + \not{k}}{m^2 - (p+k)^2} \not{\epsilon}(k) u(p) \\ &= \frac{e^2}{2pk} \bar{u}(p') \not{\epsilon}'(k') \not{\epsilon}(k) \not{k} u(p) \end{aligned}$$

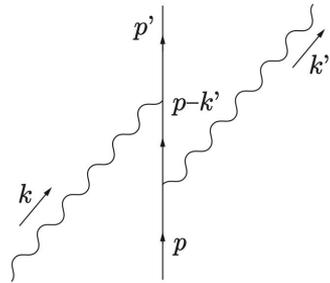


$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 &= e^2 \bar{u}(p') \not{\epsilon}(k) \frac{m + \not{p} - \not{k}'}{m^2 - (p-k')^2} \not{\epsilon}'(k') u(p) \\ &= \frac{e^2}{2pk'} \bar{u}(p') \not{\epsilon}(k) \not{\epsilon}'(k') \not{k}' u(p) \end{aligned}$$

# 微分散乱断面積: Klein-Nishinaの式



$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= e^2 \bar{u}(p') \not{\epsilon}'(k') \frac{m + \not{p} + \not{k}}{m^2 - (p+k)^2} \not{\epsilon}(k) u(p) \\ &= \frac{e^2}{2pk} \bar{u}(p') \not{\epsilon}'(k') \not{\epsilon}(k) \not{k} u(p) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 &= e^2 \bar{u}(p') \not{\epsilon}(k) \frac{m + \not{p} - \not{k}'}{m^2 - (p-k')^2} \not{\epsilon}'(k') u(p) \\ &= \frac{e^2}{2pk'} \bar{u}(p') \not{\epsilon}(k) \not{\epsilon}'(k') \not{k}' u(p) \end{aligned}$$

$$\rightarrow |\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2 = |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 + \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* + \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^*$$

## 微分散乱断面積: Klein-Nishinaの式

まず電子のスピンについて平均をとる

$$\begin{aligned}\sum_{e, \text{spins}} |\mathcal{M}_1|^2 &= \sum_{e, \text{spins}} \frac{e^4}{(2pk)^2} [\bar{u}(p') \Gamma_1 u(p)] [\bar{u}(p') \bar{\Gamma}_1 u(p)]^* \\ &= \frac{e^4}{(2pk)^2} \text{Tr} \Gamma_1 (\not{p} + m) \bar{\Gamma}_1 (\not{p}' + m) = e^4 \left( \frac{4(\varepsilon'k)^2}{pk} + \frac{2pk'}{pk} \right)\end{aligned}$$

虚心坦懐に全部計算すると

$$\frac{1}{2} \sum_{e, \text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = e^4 \left( \frac{\tilde{\omega}}{\omega} + \frac{\omega}{\tilde{\omega}} + 4(\varepsilon\varepsilon')^2 - 2 \right)$$

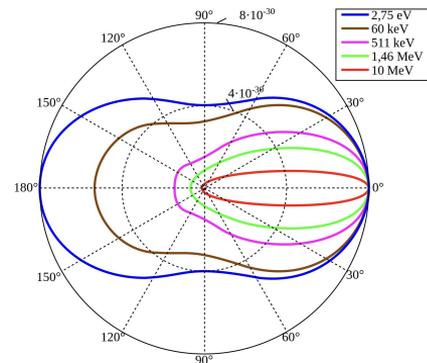
## 微分散乱断面積 : Klein-Nishinaの式

さらに光子の偏極についても平均をとる

$$\frac{1}{2} \sum_{\gamma, \text{polarizations}} \frac{1}{2} \sum_{e, \text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = 2e^4 \left( \frac{\tilde{\omega}}{\omega} + \frac{\omega}{\tilde{\omega}} - \sin^2 \theta \right)$$

これで微分散乱断面積 : Klein-Nishinaの式が出る

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m} \left( \frac{\tilde{\omega}}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\tilde{\omega}}{\omega} + \frac{\omega}{\tilde{\omega}} - \sin^2 \theta \right)$$

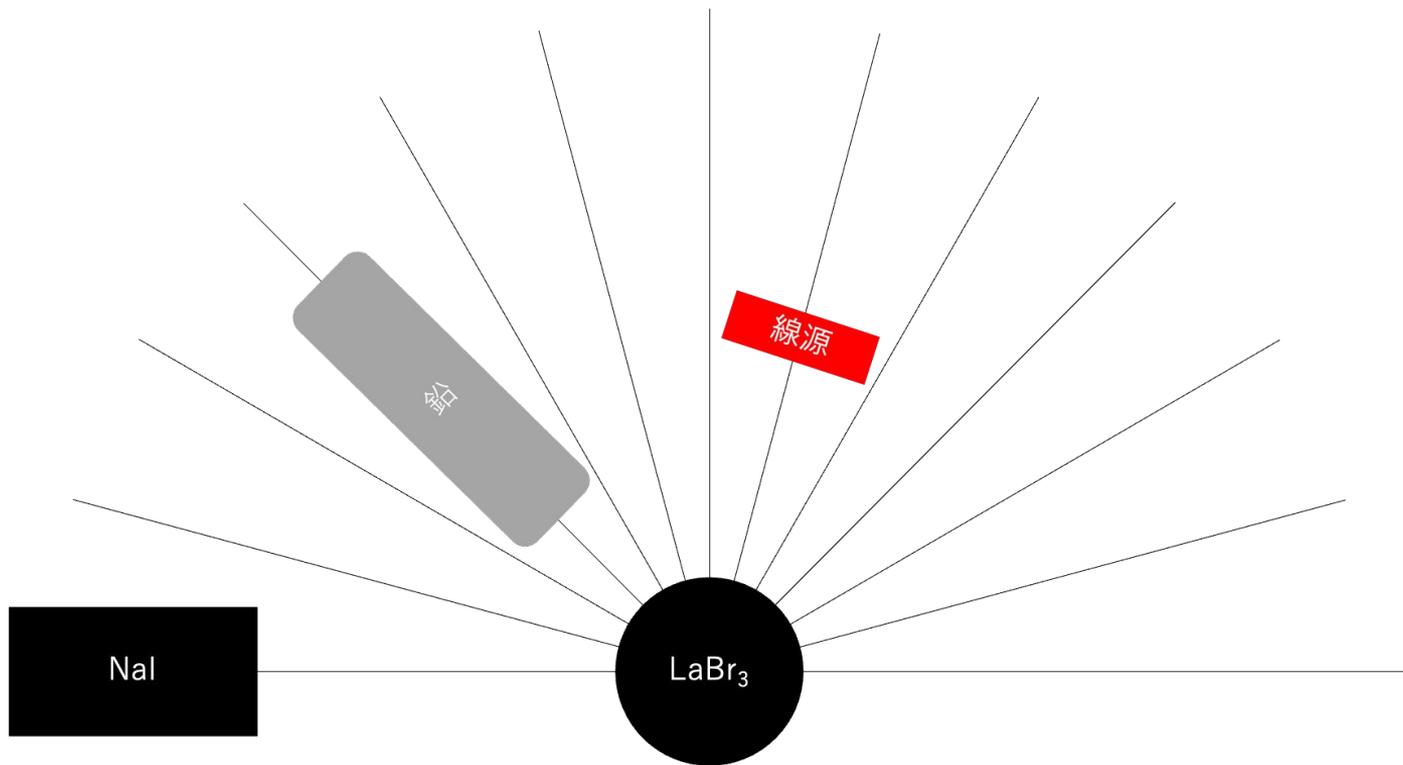


# 実験方法

担当:橋本

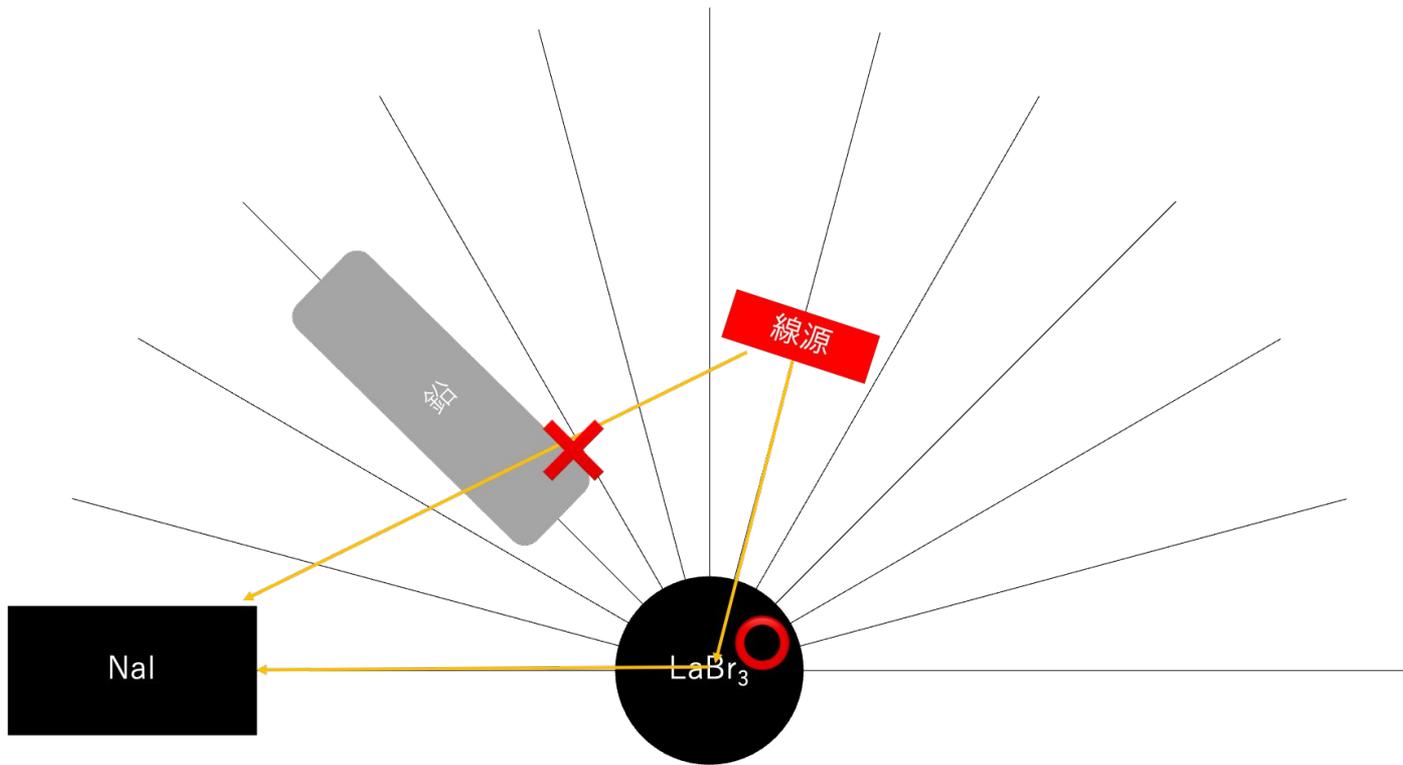
# 実験方法

線源(Na22)からの $\gamma$ 線をランタンブロマイドシンチレーターにあて、コンプトン散乱した電子をNaIで観測した。  
ランタンブロマイドシンチレーターを中心に線源の角度を変えて実験した。



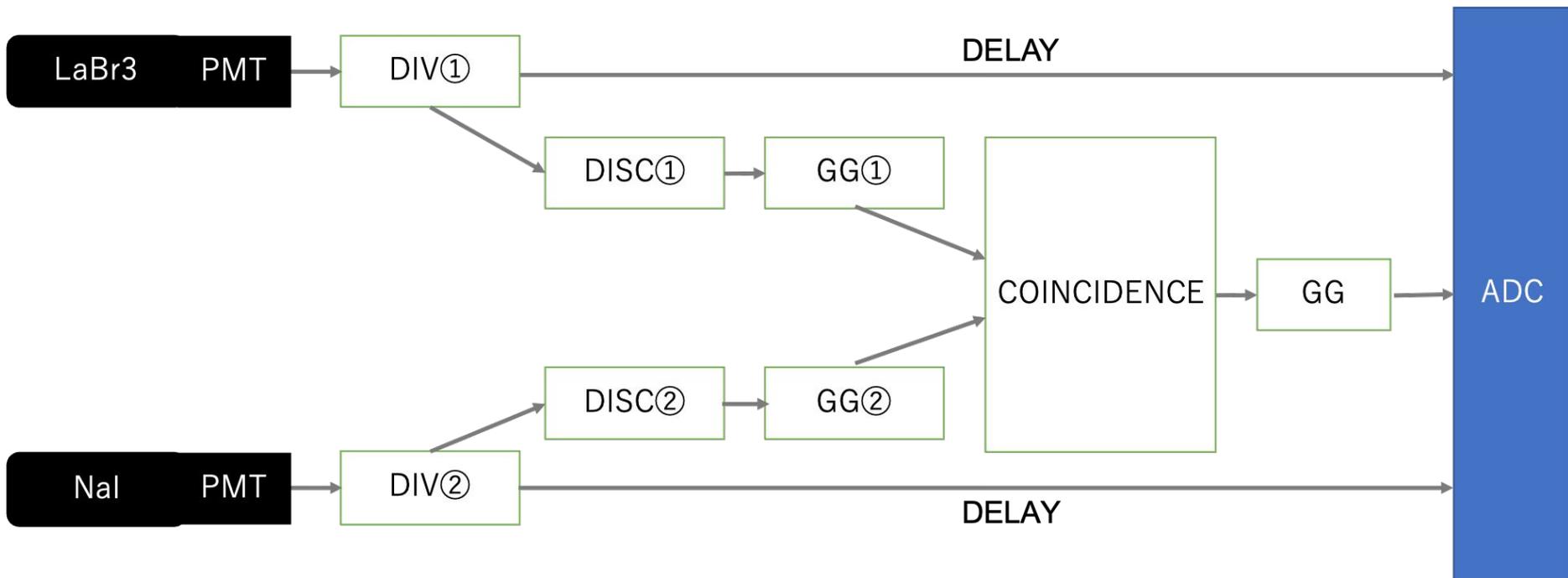
# 実験方法

- ・線源から直接ヨウ化ナトリウムシンチレーターに  $\gamma$ 線が入らないように鉛で遮った。
- ・ランタンブロマイドシンチレーターでは散乱電子のエネルギーを、ヨウ化ナトリウムシンチレーターでは散乱  $\gamma$ 線のエネルギーを測定、光子として出力する

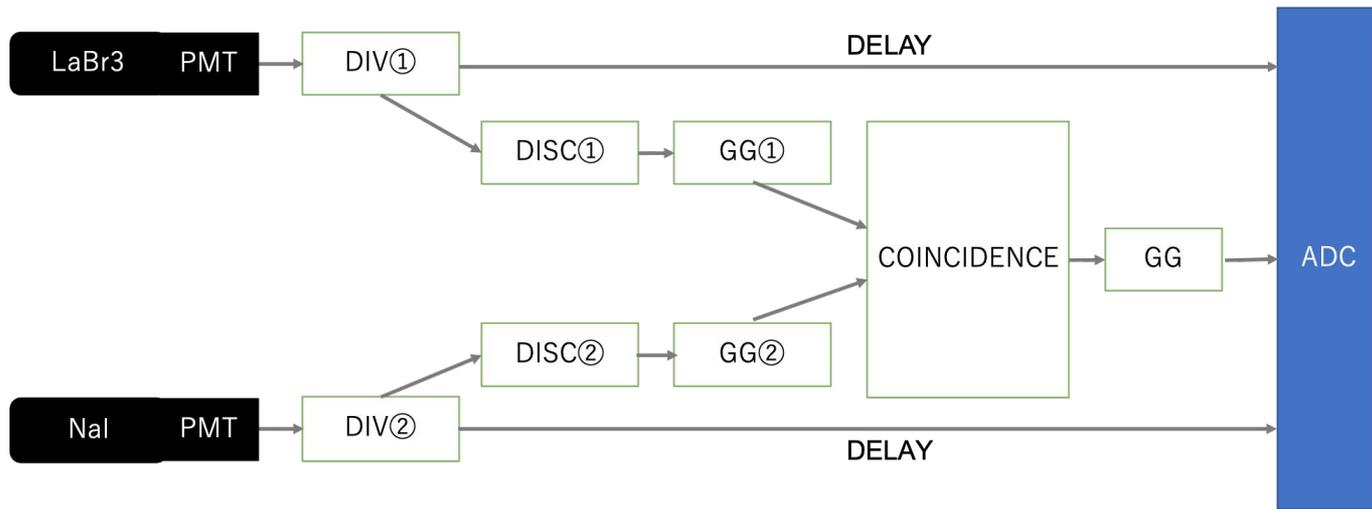




# 回路图



# 回路図



PMT...

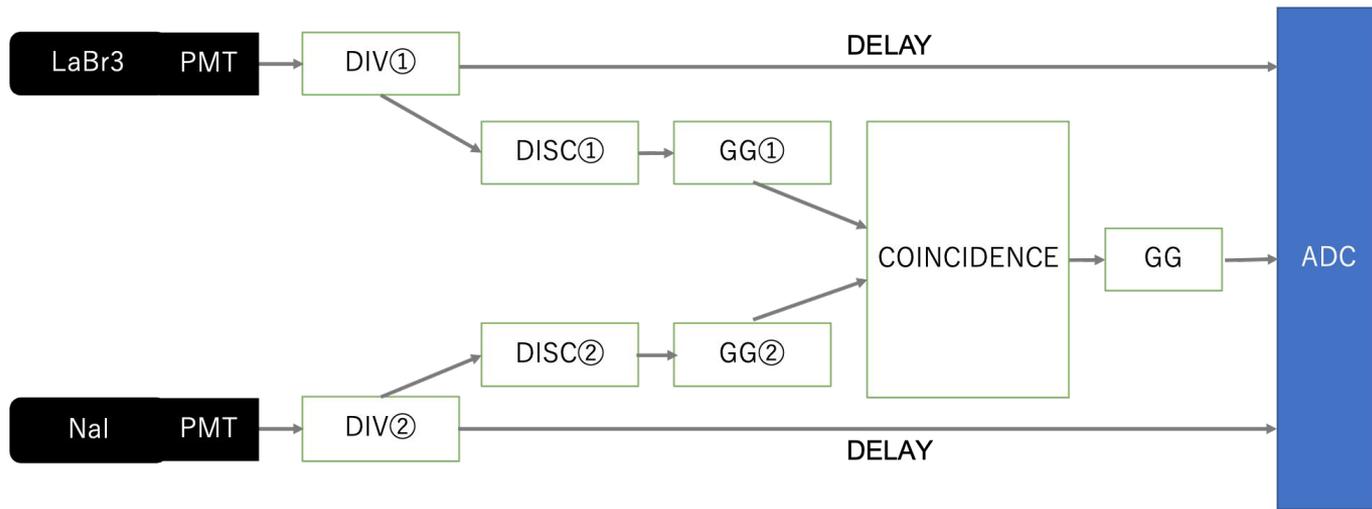
光電子増倍管のこと。シンチレーターによって出力された光子を電気信号として出力する。

DIV(DIVIDER)...入力信号と同じ信号を分岐させて複製する。

DISC(DISCRIMINATOR)...一定以上の信号を感知して矩形波に変える。

GG(GATE GENERATOR)...矩形波の部分に応じて GATE 信号を出力する。

# 回路図



COINCIDENCE...入力が同時にきた時のみ信号を出力する

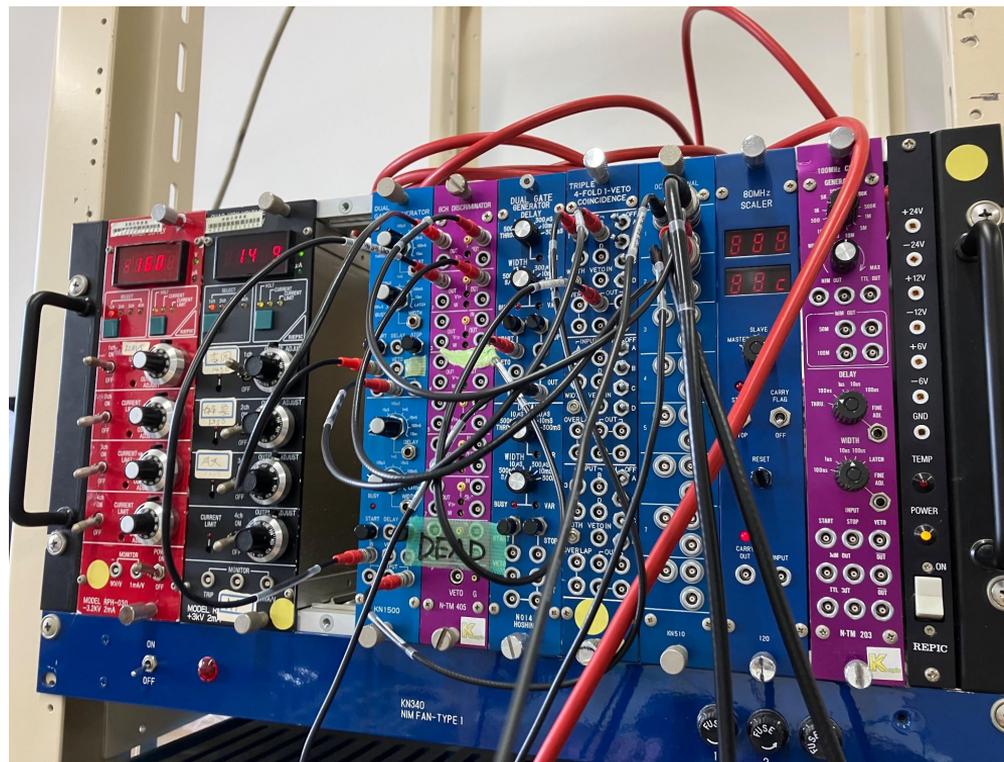
DELAY...長いケーブルを噛ませて信号を遅らせる。

分岐先のDISC-GG-COINC-GGの間で生じる時間差をここで相殺する。

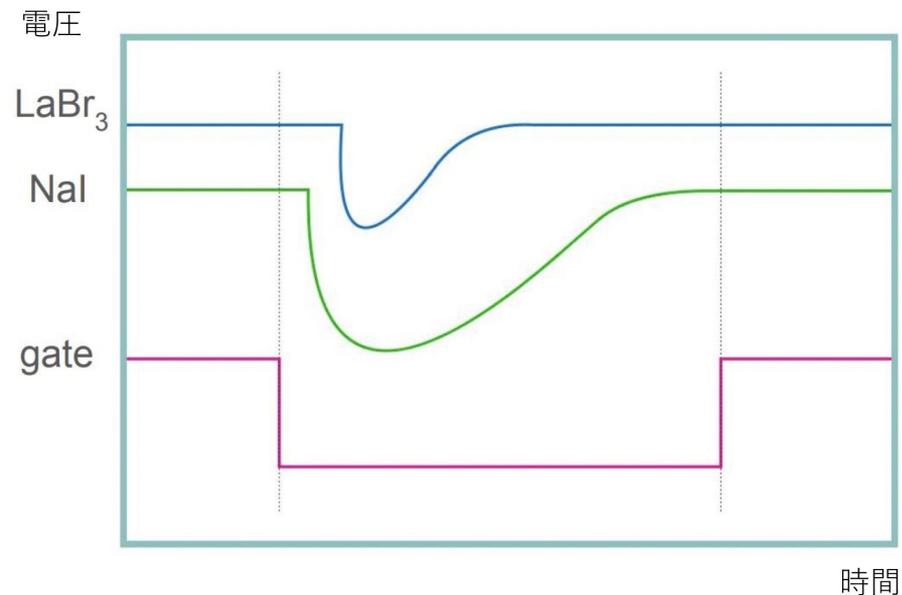
ADC(ANALOG-TO-DIGITAL CONVERTER)...

シンチレータからの信号を GATE信号の範囲で積分したデータを PC側に出力する。

# 実際の写真



# ADCカウントについて



GATE信号で指定している範囲で各増倍管からの信号を積分している

# 実験結果・解析

担当: 田中 原田

# 実験結果・解析

本実験では、

- ・シンチレーターのエネルギー較正
- ・角度ごとの散乱粒子エネルギー計測
- ・角度ごとの散乱頻度計測

の順で計測を行った。

# エネルギー較正(キャリブレーション)

シンチレーターが入射光のエネルギーに比例した光量の光を放つと仮定した上で、 $^{22}\text{Na}$ から放射される511keVと1275keVの $\gamma$ 線を対象としてエネルギー較正を行った。

$$E=A \times (\text{ADC count})+B$$

E:入射光のエネルギー

ADC count:チャンネル数

A,B:パラメーター

# エネルギー較正(LaBr<sub>3</sub>):結果

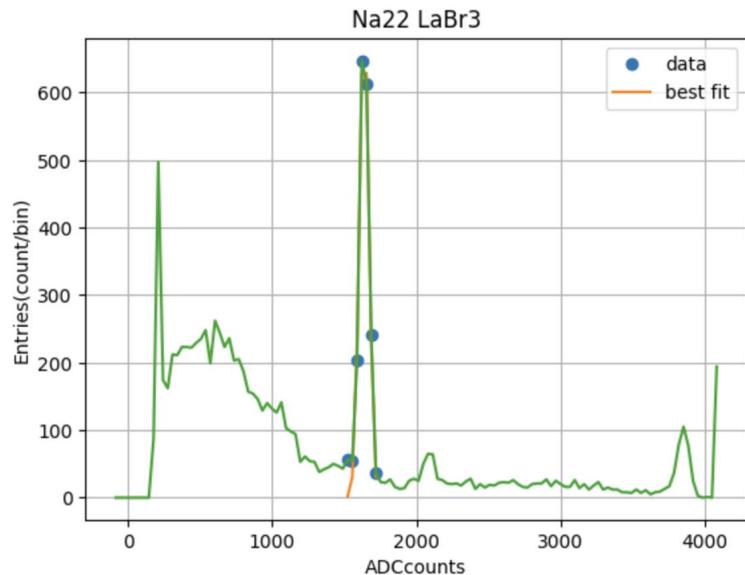


図:511keVのガンマ線に当たるピーク

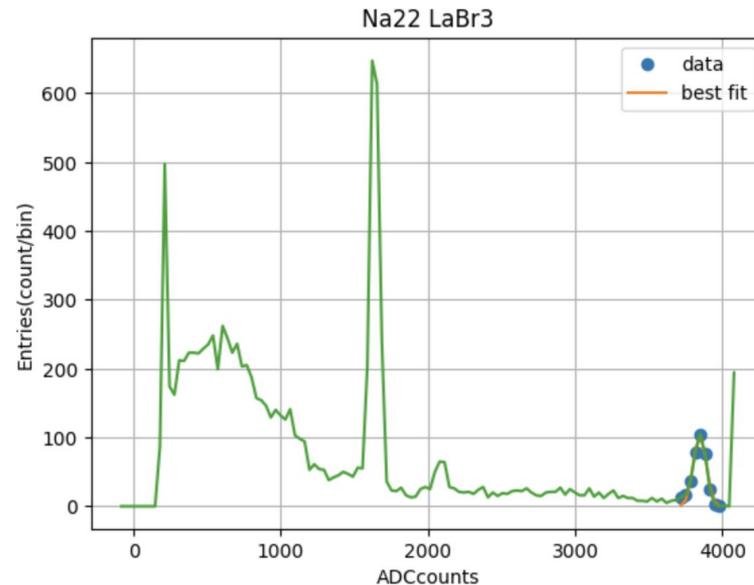


図:1275keVのガンマ線に当たるピーク

# エネルギー較正(NaI):結果

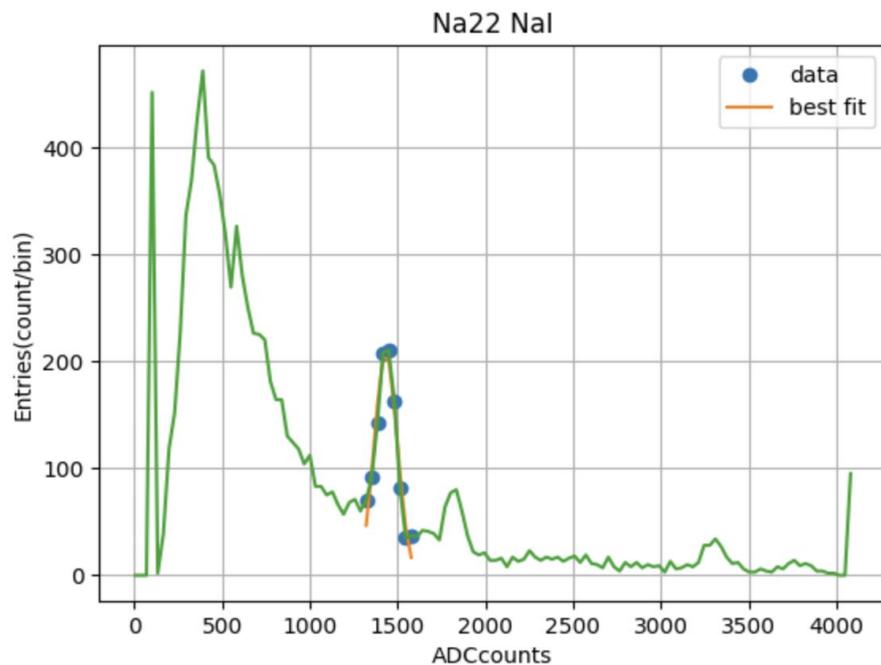


図:511keVのガンマ線に当たるピーク

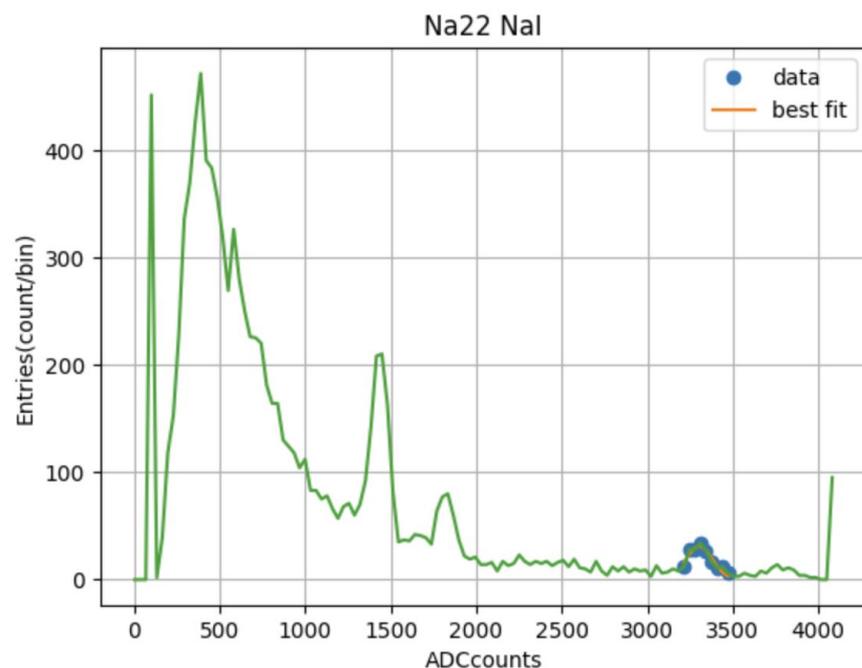


図:1275keVのガンマ線に当たるピーク

# エネルギー較正:結果

	Nal	LaBr <sub>3</sub>
511keVのADC値	1432.96094 (Ch)	1637.42950 (Ch)
1275keVのADC値	3303.16908 (Ch)	3846.65990 (Ch)
パラメーター A	0.408510680	0.345821784
パラメーター B	-74.3798487	-55.2587922

以後のデータでは得られたパラメーターを用いて ADC値をエネルギーに変換した。

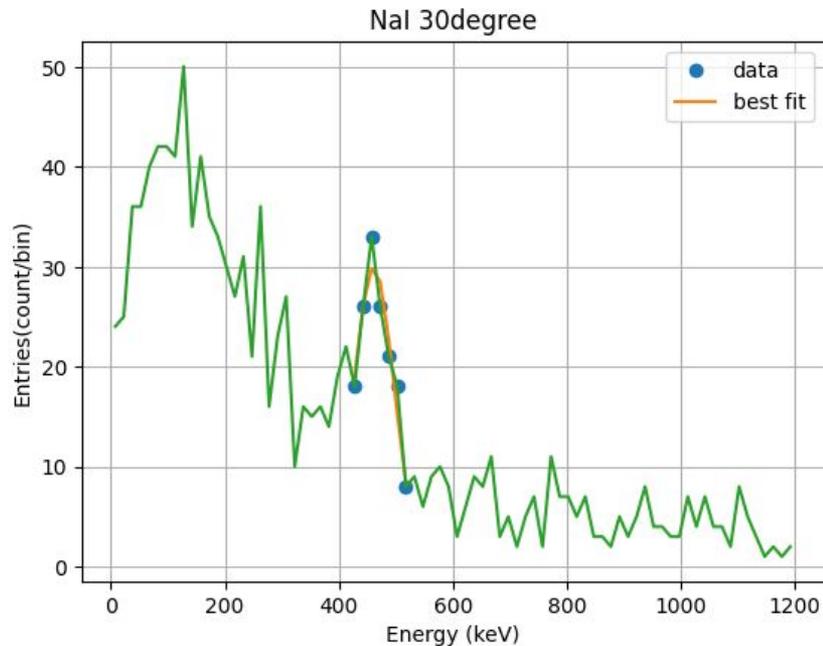
# エネルギーの角分布

散乱ガンマ線エネルギーの理想曲線は

$$h\omega' = \frac{h\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)} = \frac{511}{2 - \cos\theta} \text{ (keV)}$$

散乱電子エネルギーは総エネルギーからこれを差し引いた値

# エネルギーの角分布



緑のヒストグラム:取得データ

橙色の曲線:ガウシアンフィッティング

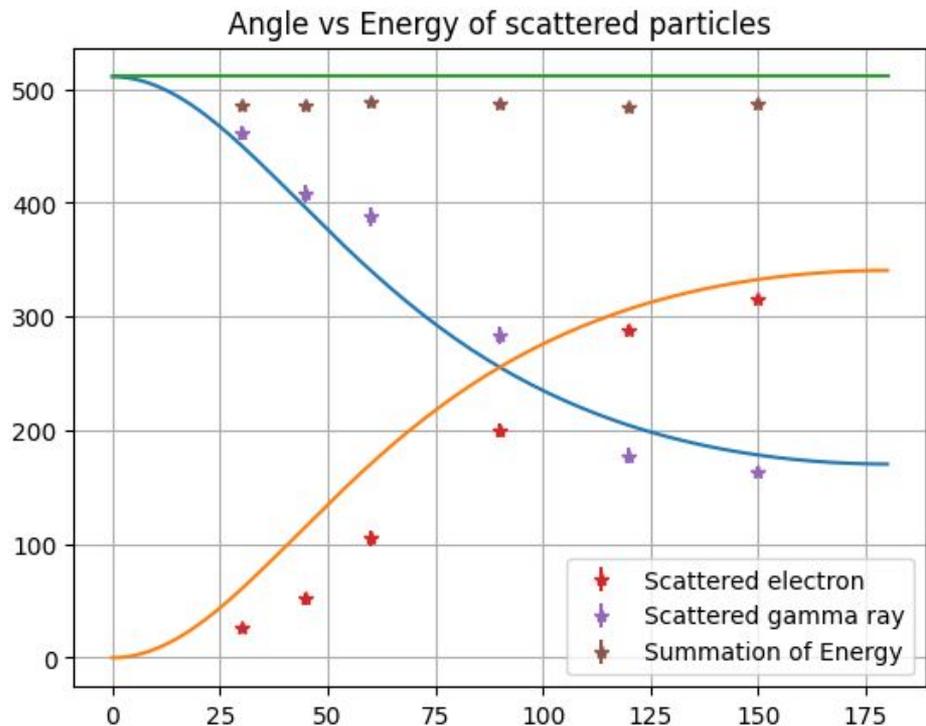
ピーク値の誤差  $\delta$

$$\delta = \delta_{\text{gauss}}/\sqrt{N}$$

# エネルギーの角度分布:ピークの値

角度 (degree)	Labr3での 散乱電子ピーク (keV)	NaIでの 散乱光子ピーク (keV)	エネルギー和の ピーク (keV)
30	26.5968255 ± 2.07100503	461.236740 ± 6.47072941	485.234610 ± 3.67706243
45	51.8946084 ± 5.81546406	408.490282 ± 7.95765655	485.730320 ± 3.69145034
60	105.457993 ± 6.74144528	387.806024 ± 7.96596421	488.600473 ± 2.56255937
90	200.224801 ± 5.72698089	283.808214 ± 7.95416853	487.481201 ± 3.67991474
120	288.176275 ± 4.10668884	177.384246 ± 6.87834045	483.702148 ± 3.97335513
150	316.178556 ± 2.44148703	163.665388 ± 3.73459486	487.575285 ± 3.00452444

# エネルギーの角分布:結果



緑直線:

$E = 511$  (keV) の直線

青曲線:モデル関数

$$E_{electron} = \frac{511}{2 - \cos\theta} \text{ (keV)}$$

橙曲線:モデル関数

$$E_{gamma\ ray} = 511 - \frac{511}{2 - \cos\theta} \text{ (keV)}$$

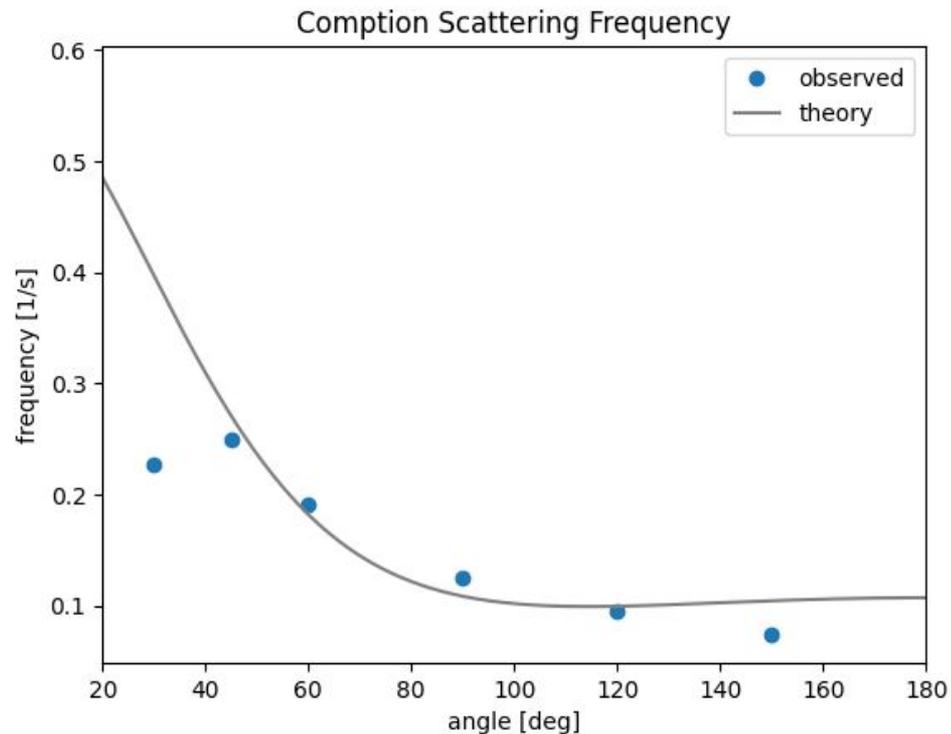
# コンプトン散乱の頻度

散乱頻度の理想曲線(クライン・仁科の式により)

$$freq [1/s] = A \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right)$$

パラメータAは観測値より推定

# 散乱頻度の観測結果



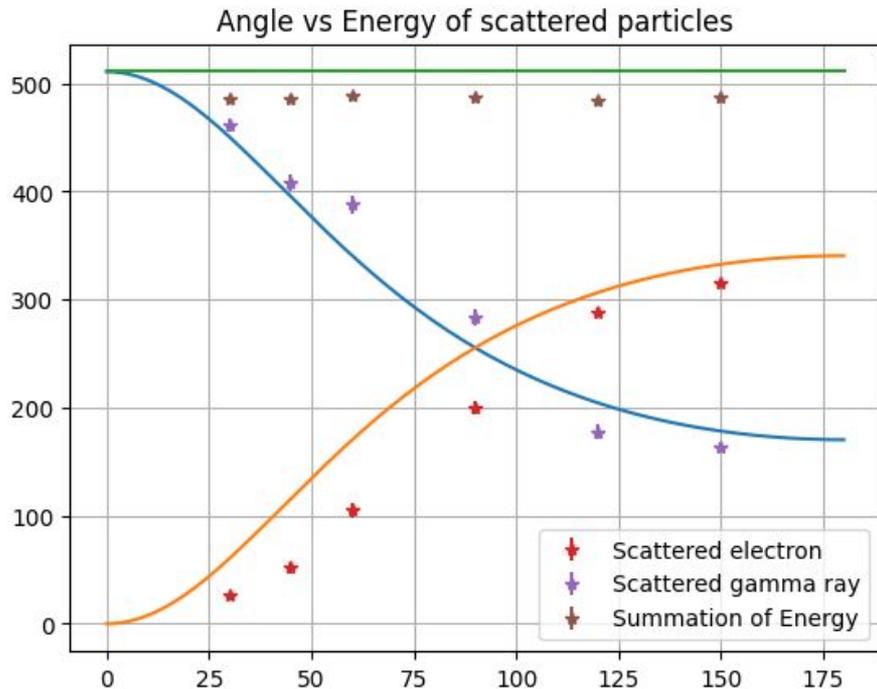
黒線：理想曲線

青点：観測値

理想曲線のパラメータは、angle  
が $60^\circ$ 以上の観測値より推定

考察

# 考察: エネルギーの角度分布



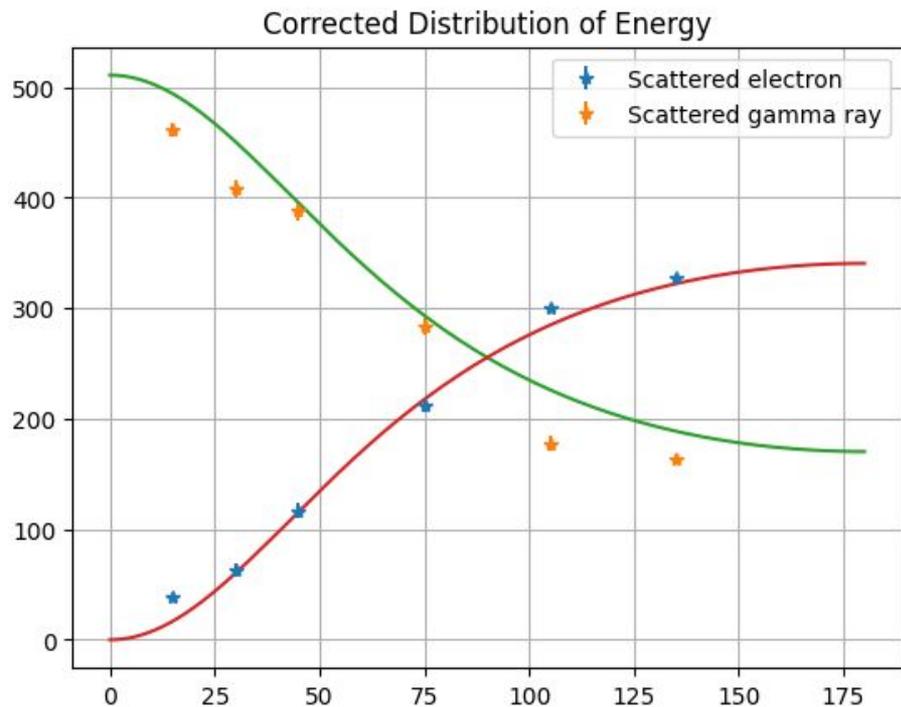
エネルギー推移の形状は予想されるものに近い

1. 角度のズレ

2. キャリブレーションのズレ

以上二つを考察する

# 考察:補正モデル



ズレの補正①:

各点で角度を15度小さく見積もる

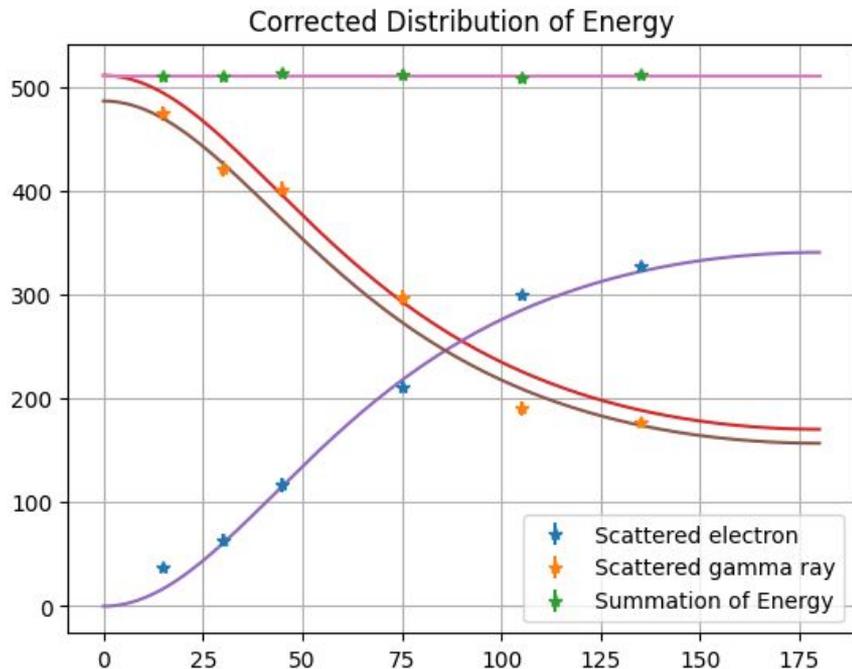
ズレの補正②:

LaBr3で取得した散乱電子のエネルギーを1.5keV大きく見積もる

新たなモデルは散乱電子の曲線に良く合致する

散乱ガンマ線は以前として過小評価

# 考察:補正モデル



## エネルギー和:

和の平均と511keVとの差を各点の値に加えた

## 散乱ガンマ線:

各点15度ずらし、散乱電子エネルギーとの和が511keVとなるよう上にずらした

入射光エネルギーが511keVのもの

エネルギー和の平均のもので理論曲線を引いた

モデル関数との乖離は主に

- ・エネルギーの減衰あるいは過小評価
- ・異なる角度からの影響

からなると考えられる。

# 考察:エネルギー和のズレ

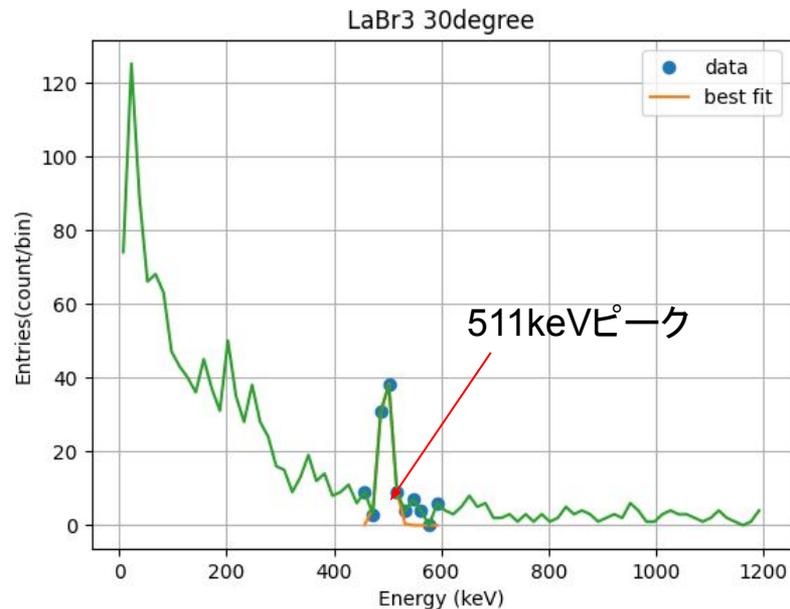


図:ズレたガンマ線ピーク

LaBr3で511keVのピークを30, 45, 150度でフィッティング  
→それぞれ $497.022045 \pm 1.7794779$  keV

$499.606734 \pm 2.2605658$  keV

$506.727019 \pm 1.457389$  keV

LaBr3は時間経過でピークをどんどん小さく  
計上する。

NaIでも同様にピークのズレがあることが予想される。

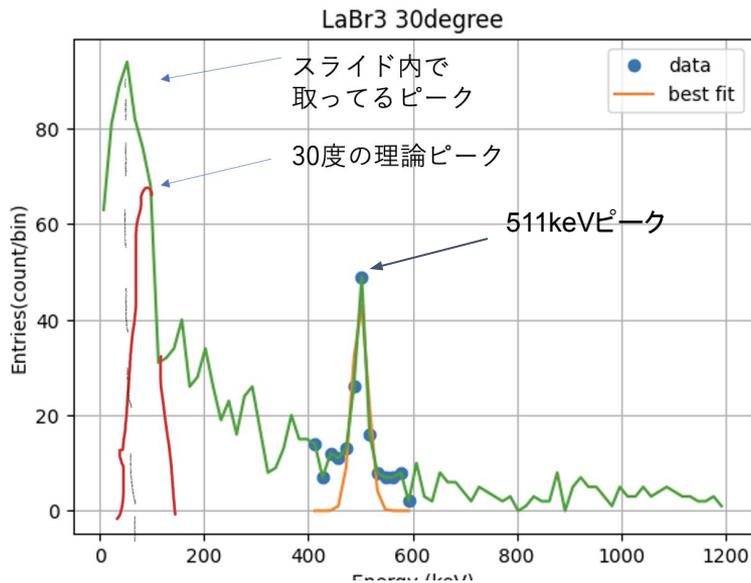
# 考察:エネルギー和のズレ

LaBr<sub>3</sub>から見られる511keV,1275keVのピークを代用しキャリブレーションを行う。

角度 (degree)	傾き	切片
30	0.35431	-56.280
45	0.35348	-56.706
150	0.34680	-53.052

→結果、ピークの数値に大きな変化は生じなかった

# 考察:ピーク選択



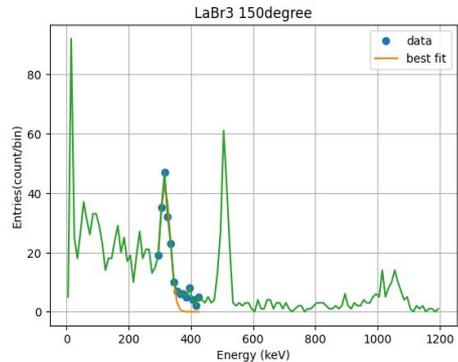
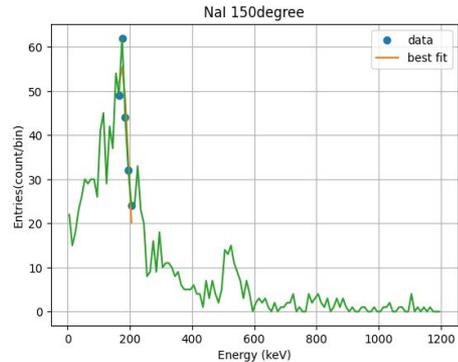
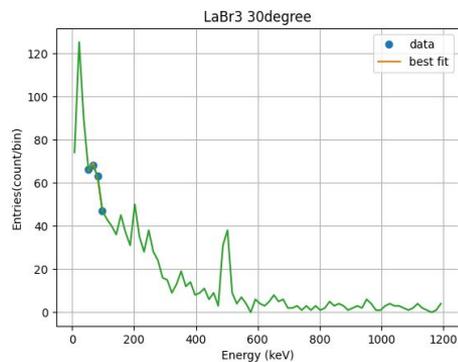
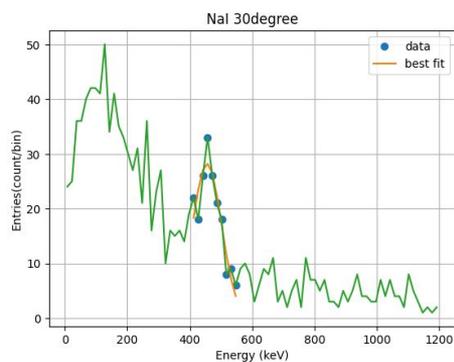
ピーク部分がコンプトン連続部に埋もれている

エネルギー較正と合わせ選択するピークを再考

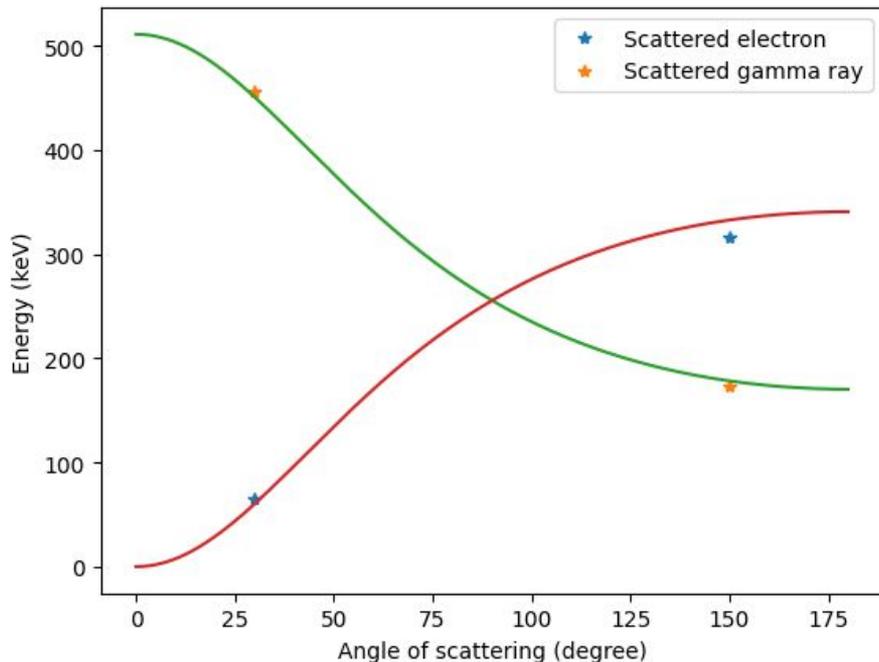
# 考察:ピーク選択

- ・ピークの選び方を見直す

- ・bin数を増やしエネルギー分解能を上げる



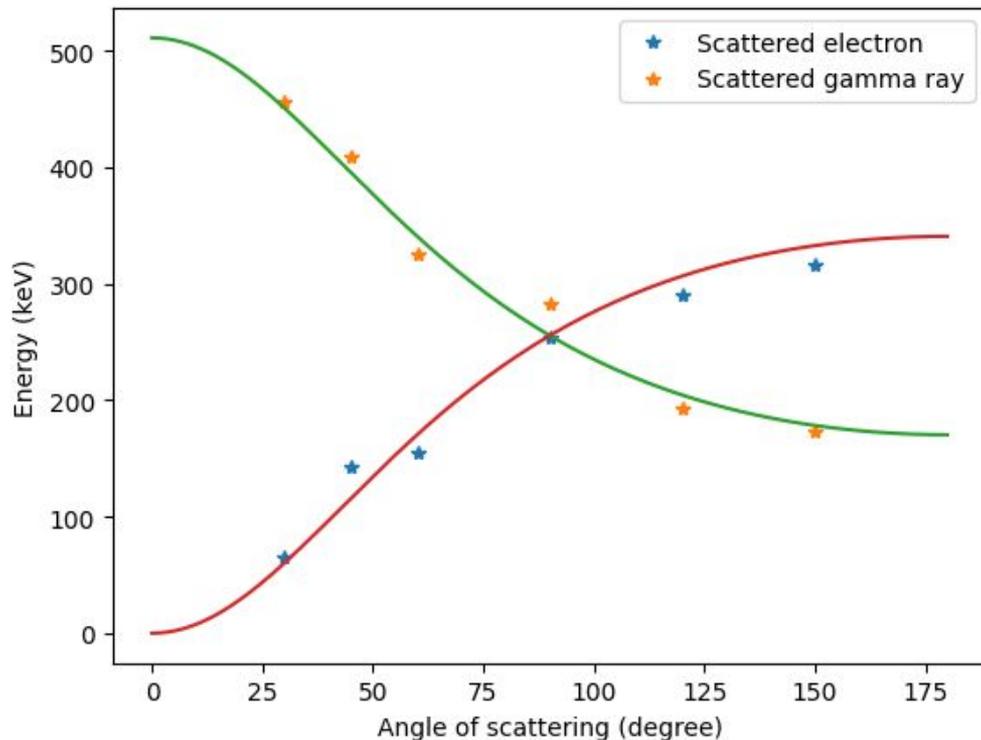
# 考察:ピーク選択



本来の理論曲線に合致するピークは存在する

→他ピークも同様に見直しを行う

# 考察:ピーク選択

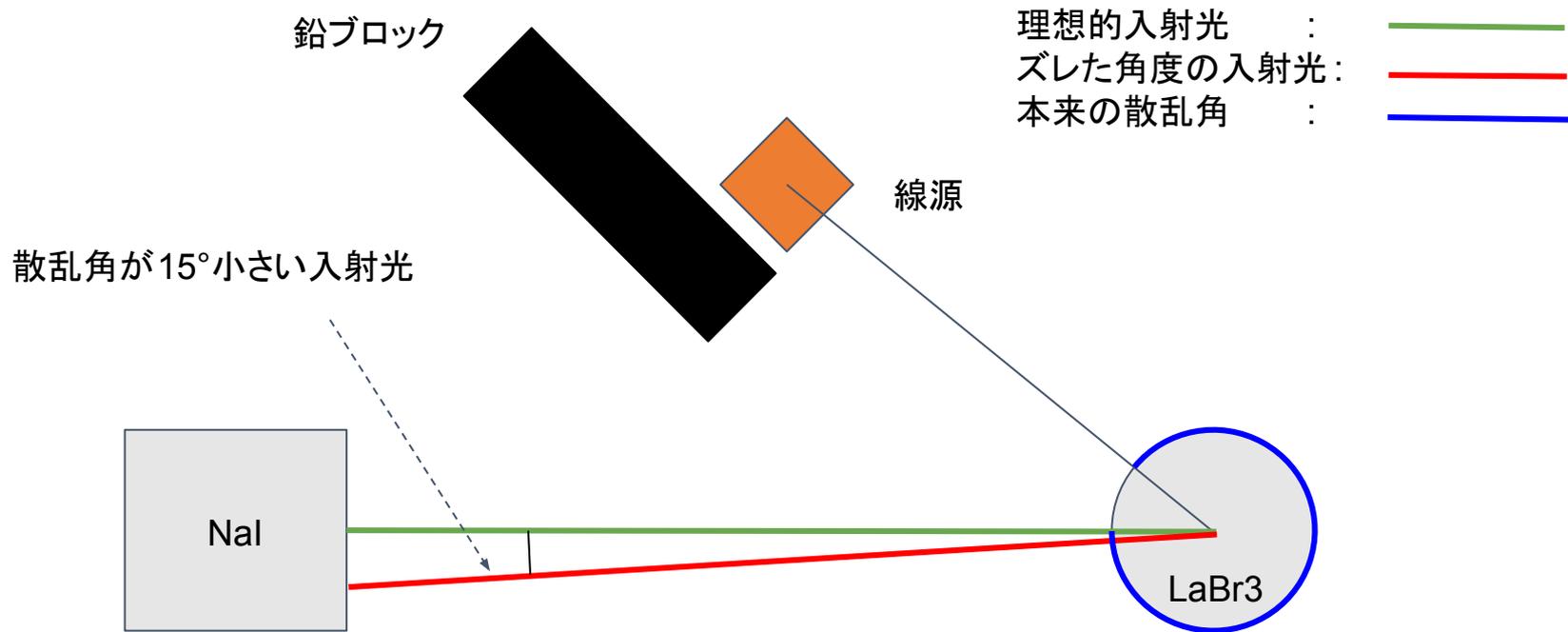


理論曲線が予言するピーク値に近いピークを抽出した場合のグラフ

ピークが見えにくい・小さい角度も多い

欲しいものとは異なる角度からのピークが目立った

# 考察:機器による角度のズレ

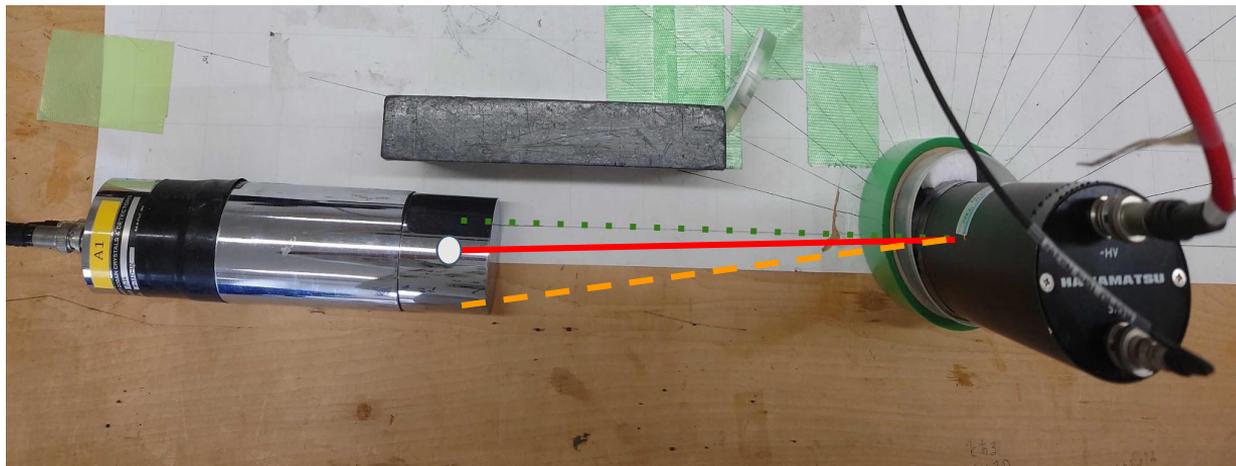


# エネルギーの角度分布:角度のズレ

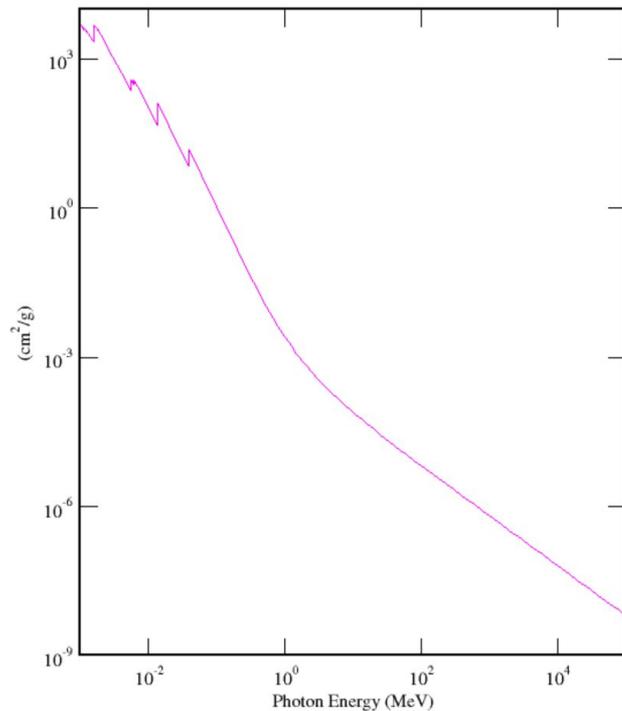
写真ではNaIの中心軸がガイド線に乗っていない(ように見える)

→ピークが角度の小さい方へ?

加えて鉛ブロックがガンマ線を反射することでノイズが生じる



# LaBr3で光電吸収される

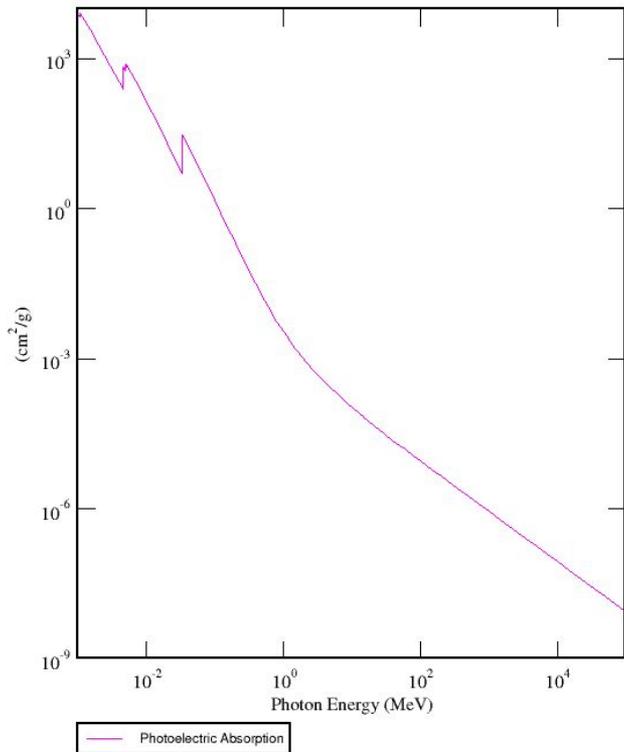


透過確率

$$P_{penet} = e^{-\rho x \mu}$$

光電吸収率のエネルギー依存性  
NIST XCOMより引用

# NaIが蛍光しない

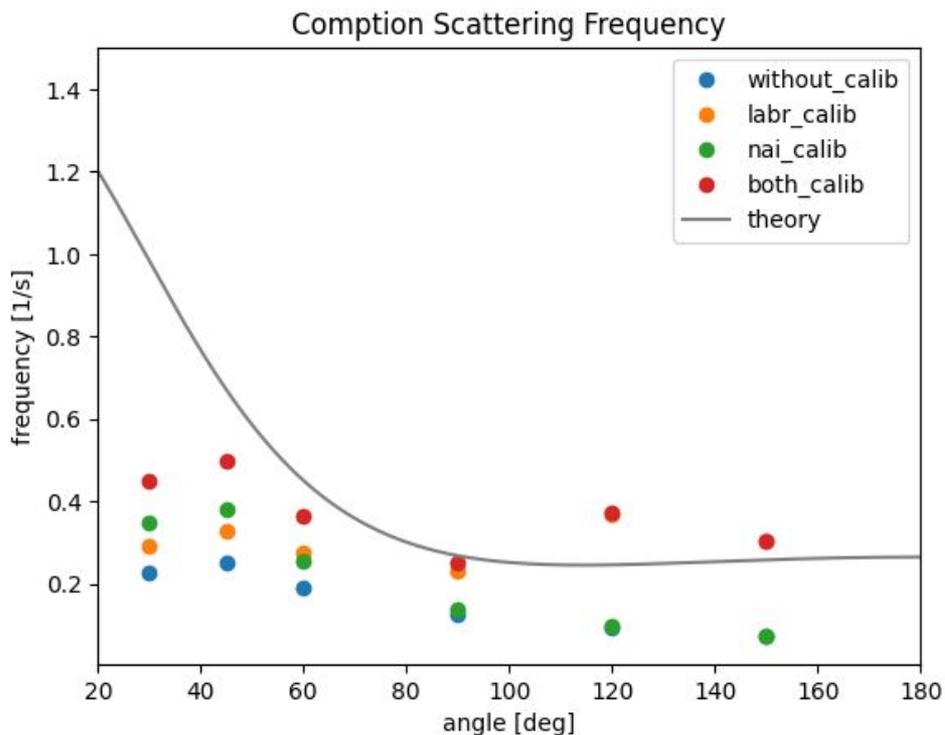


蛍光確率

$$P_{absorb} = 1 - e^{-\rho x \mu}$$

光電吸収率のエネルギー依存性  
NIST XCOMより引用

# 補正後の散乱頻度



黒線：理想曲線

(赤点に対して $\text{angle} \geq 60$  でfitting)

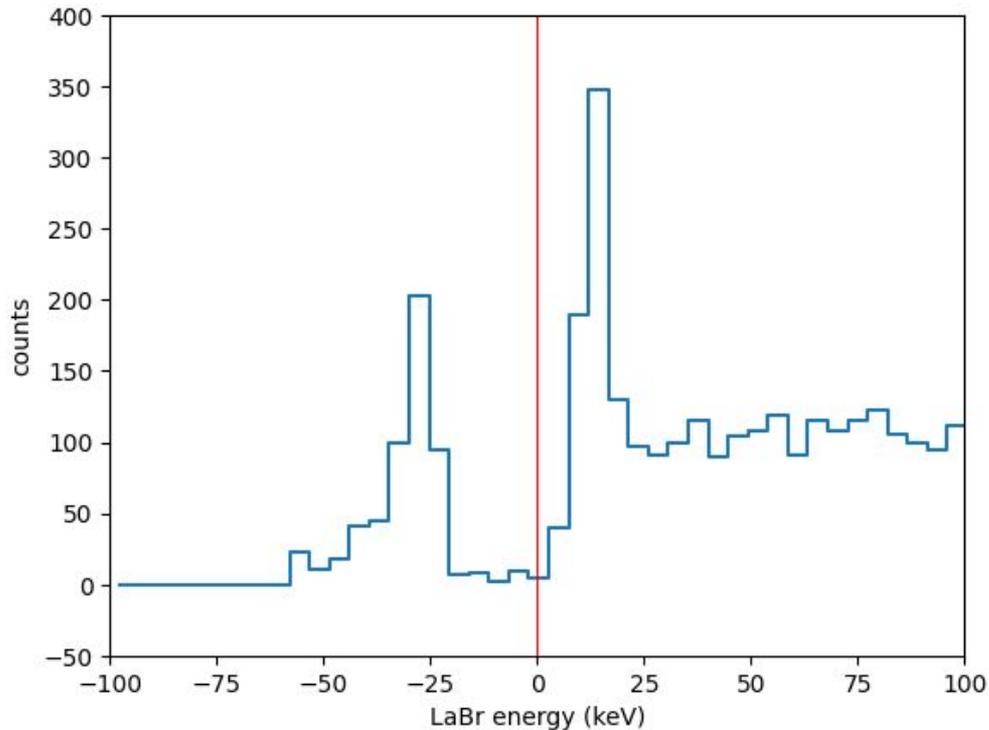
青点：観測値

橙点：LaBr3での吸収を考慮

緑点：NaIでの透過を考慮

赤点：吸収・透過を考慮

# 30°での頻度が少ない



LaBrでの観測数

10keV辺りで急激に減少  
=スレッシュホールド

30°ではLaBrのエネルギーが小さいため、観測できなかった散乱がある。

# 結論

# 結論:まとめ

## エネルギーの角度分布

コンプトン散乱を確認し、ガンマ線の粒子性を確認した。  
一部のピークは異なる角度からの散乱光に埋もれてズレが生じた。

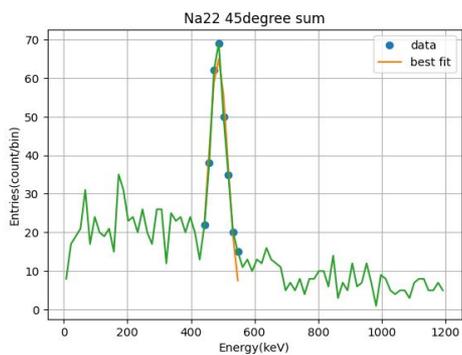
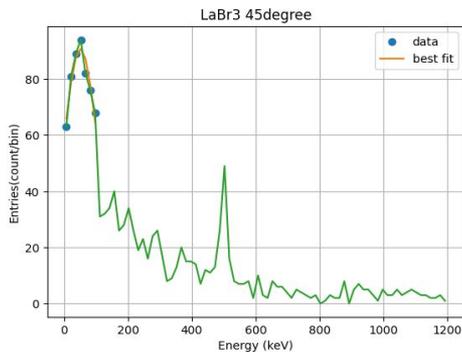
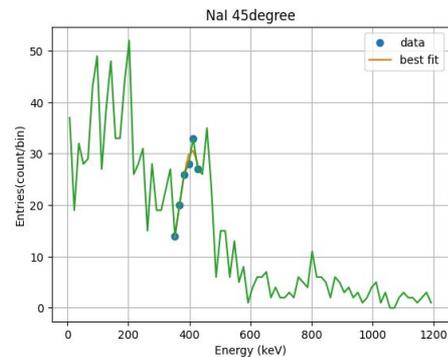
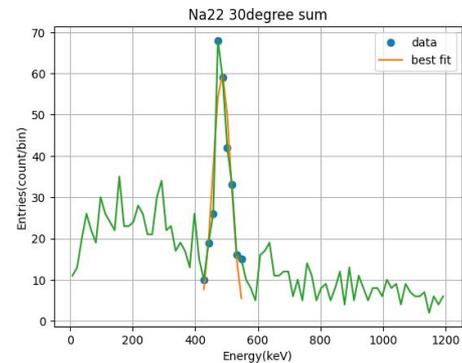
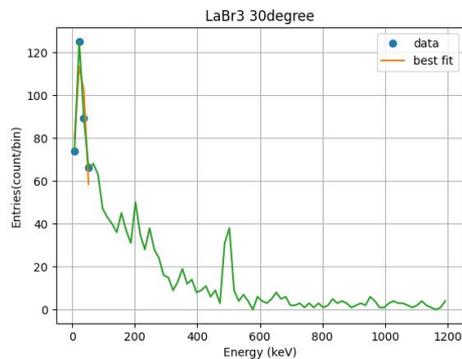
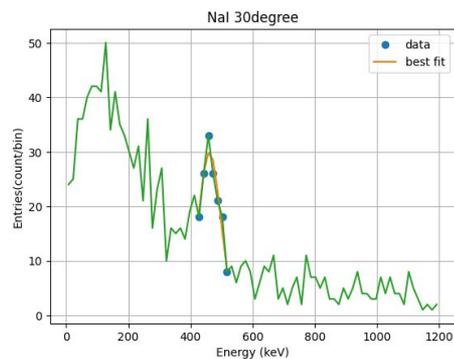
## 微分散乱断面積

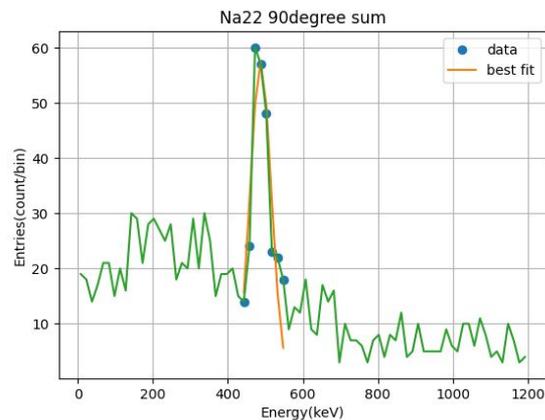
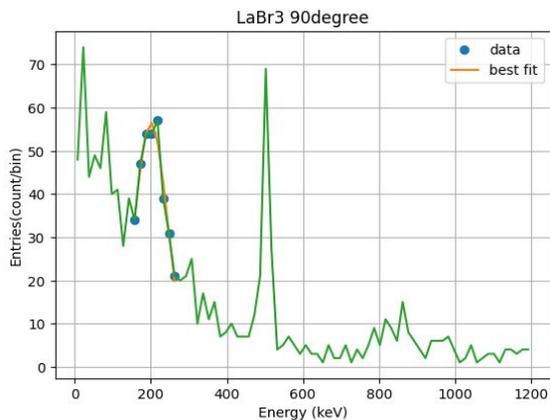
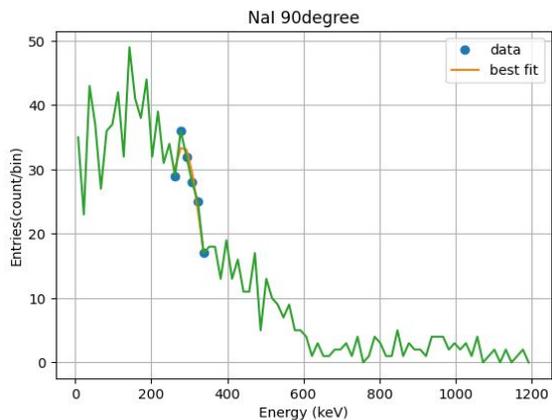
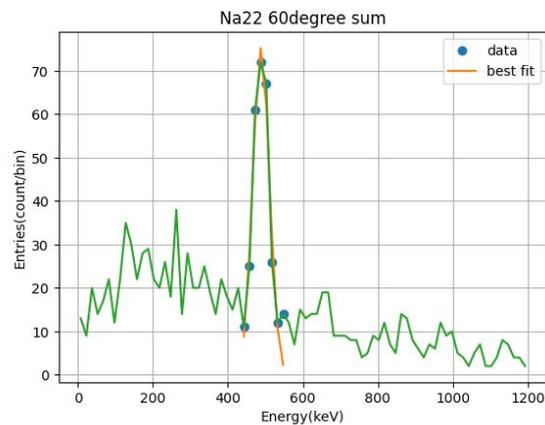
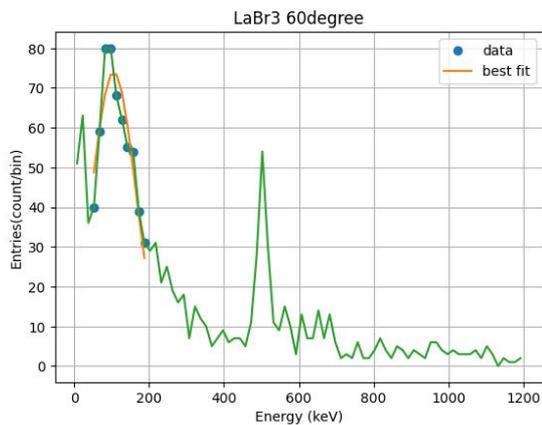
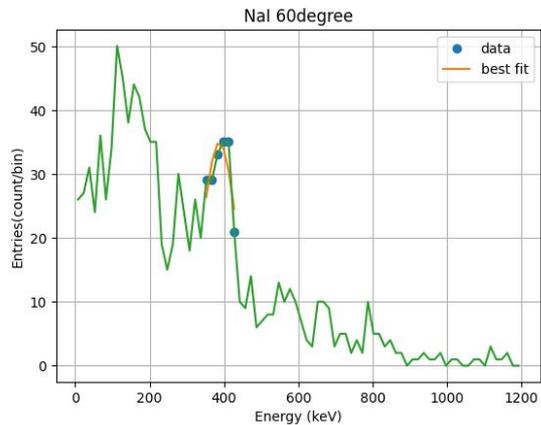
散乱角の大きい部分では概ね理論にそったデータが得られた。  
散乱角が30度の部分では理論よりも低い散乱頻度を得た。

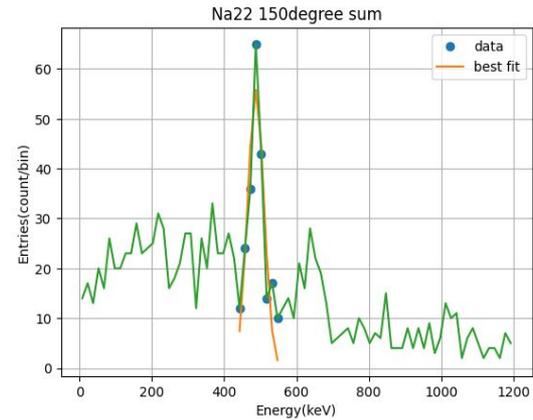
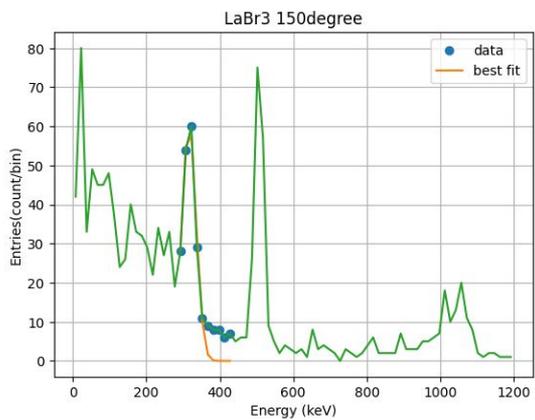
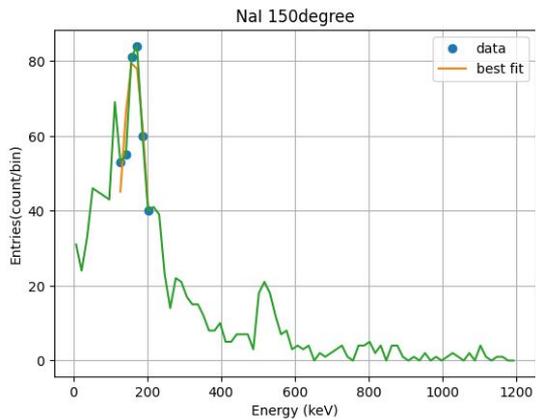
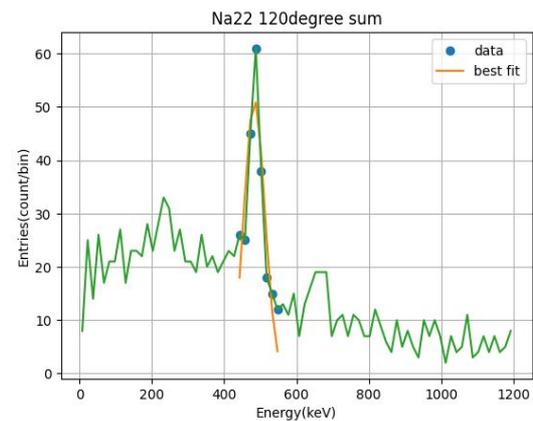
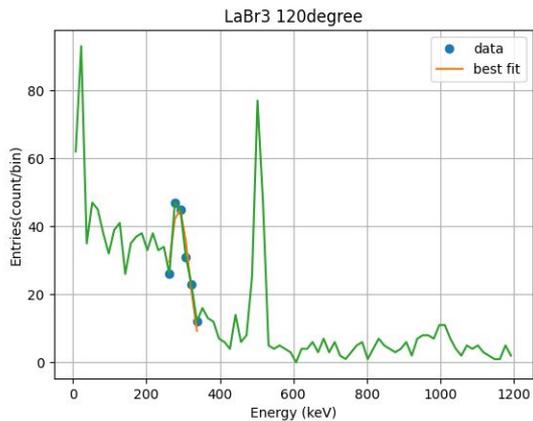
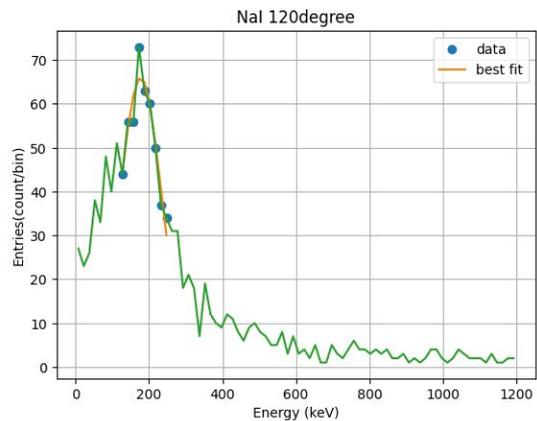
# 結論:精度向上のための課題

- ・コインシデンスを取りながらのエネルギー較正を随時行う
- ・観測イベント数を増やし、よりはっきりとしたピークを得る
- ・鉛ブロックを用いて角度分解能を上げる
- ・以上を効率よく達成するため、線源をより計数率の高いものに変化  
統計誤差やノイズの影響を減らす

# 予備ページ:ピーク図







# 予備ページ:理論にほど近いピーク

