$\beta - \gamma$ 相関測定における Parity 非保存の検証

木戸顯　　島尚徳　　堀江竜一　　森澤理之

平成 9 年 7 月 8 日

概 要

我々は 1997 年の 4 月 $\sim$ 5 月において Radio Isotope ^{22}Na から放出されるβ線とγ線の相関 ($\beta - \gamma$ correlation) を測定し、「弱い相互作用の理論」から予想される Asymmetry を実験的に検出することに成功した。

実験においては、コイルによって磁化させた SUY-cylinder 内の 偏極 electron にγ線を compton 散乱させることによって、望みの方向に偏極した γ 線を選択透過させた。β- counter には 厚さ 2mm のプラスチックシンチレーターを、また、γ-counter には NaI シンチレーターを用いた。磁場によって couter 系統の受ける影響をならべく小さくするために、 外部磁場に強い fine mesh 型 PMT を μ-metal で磁気遮蔽し、さらにコイルから PMT までの距離を遠ざけるために 50cm 長の ライトガイドを PMT に マウントした。

以下、本実験の基礎となる「理論」、そして「実験の詳細」を順に見ていくことにする。

目 次

第 1 章　Introduction **1**

第 2 章　Set up & DAQ **6**

2.1 Setup の概要 6
2.2 Coil 7
2.3 Detector 8
2.4 NIM&CAMAC 8
2.5 DAQ 12
2.5.1 ADC data 12
2.5.2 counts number 12
2.5.3 磁場反転 12

第 3 章　DATA & 解析 **13**

3.1 Calibration & Resolutions 13
3.2 解析方針 14
3.3 解析手順 18
3.4 DATA 19
3.5 解析結果 20
3.6 Null Asymmetry についての補足 24

第 4 章　考察と課題 **33**

4.1 考察 33
4.1.1 Parity の破れの検証 33
4.1.2 棄却した実験データについて 34
4.2 課題 34
4.2.1 前年度から、工夫、改良した点 34
4.2.2 更なる反省と課題 35

付 録 A Parity Conservation **38**

付 録 B $\tau - \theta$ puzzle **39**

付 録C $\beta-\gamma$ correlation **40**
C.1 Density matrix for β-decay . . . 40
C.2 The $\beta-\gamma$ angular correlation function . . . 45
C.3 Spin Eigenfunction . . . 46
C.4 Radial wave function . . . 48
C.5 Plane-wave solution . . . 50
C.6 How to change formulas for β^+ -decay . . . 52
C.7 ^{22}Na β^+-decay における Asymmetry A $= \frac{1}{3}$の導出 . . . 53
C.8 Clebsch-Gordan 係数の覚え書き . . . 56

付 録D Polarization Compton Scattering **61**

付 録E Mathematica による asymmetry の数値計算 **65**
E.1 Formulation . . . 65
E.2 Asymmetry . . . 67
E.3 Mathematica . . . 68
E.3.1 Character . . . 68
E.3.2 Code . . . 68
E.4 Result . . . 73
E.5 Cu effect . . . 73

付 録F コイルに流す電流値の計算 **76**
F.1 Geometry . . . 76
F.2 計算 . . . 77

付 録G Conversion Line **80**

付 録H Kurie Plot **81**

付 録I 統計 **83**
I.1 最小 2 乗法 . . . 83
I.2 χ^2検定と Confidence Level(CL) . . . 84
I.3 誤差の伝搬 . . . 84
I.4 同一物理量の測定値が複数ある場合の統計的平均値 . . . 85

第1章　Introduction

昔の人々は、世の中にあまたある非対称性を、どう考えてきたのだろうか。心臓が左にあること、右利きが多いこと、等数え上げたらきりがない。一方、物理法則は、Newton、Leibnizの時代から、空間反転 (Parity 変換) に関して、対称であると考えられてきた。(Appendix A 参照) しかし、1950 年代はじめ、当時 $\tau - \theta$ puzzle と呼ばれた粒子崩壊問題の研究を契機に、物理法則においても、非対称性は存在する (Parity-violation) と考えられはじめた。(Appendix B 参照) 1956 年、Lee と Yang は、Weak interaction による素粒子の崩壊過程において、Parity は保存しないことを示唆した。彼らの論文の内容を、順番に説明する。まず測定理念としては、Parity 変換に対して pseudoscalar としてふるまう物理量 (例としては、運動量 $\vec{P}$、$Spin\vec{S}$の内積 $\vec{P}\cdot\vec{S}$) を測定するべきであると述べている。さらに実験としては、偏極核がβ -decay したときに放出する、β -線の角分布の測定を提案している。角分布の式は、次のように与えられる。

$$W(\theta) \;=\; 1 \;+\; A\left(\frac{\vec{P}\cdot\vec{S}}{E}\right) \;=\; 1 \;+\; A\frac{v}{c}\cos\theta \tag{1.1}$$

A は、Asymmetry Parameter と呼ばれる相互作用によって決まる係数である。また、v は β -線の速度である。

その提案を受けて、1957 年、Wu 達は^{60}Co を断熱消磁法で 0.01K まで冷却することで核を偏極させ、β -radiation の角分布を測定した。その結果、β -線は、核 Spin に対して反平行に出やすいことが分かった。〈 現在の確立した理論によると、^{60}Co は、Gamov-Tellar 型 β^+-decay($J^P = 5^+ \;\rightarrow\; 4^+$) なので、Asymmetry Parameter は $A \;=\; -1$ となる。〉 この実験によってはじめて、Parity-violation が確認されたのである。

ここから我々が用いた$\beta-$ (circular polarized)γ correlation について説明する。理念としては、Wu の実験と同じである。つまり、β-decay に引き続く、γ-線の放出によって核が偏極するのである。(γ-線放出時における磁気量子数の保存より) したがって、γ-線の helicity を測定すれば、核の偏極が分かる。我々の実験では、放射線源として、^{22}Na を用いた。^{22}Na (3^+) はβ^+- decay によって、^{22}Ne$^*(2^+)$ に崩壊し、引き続いて 10^{-10} sec 程度でγ線を放出する。(Figure1.2 参照のこと)。よって、β^+-線とγ-線はほぼ同時に飛び出すように見えるが、理論によれば、このβ^+-線 と γ-線 の同時計測数は 2 個の放射線のなす角 θによって異なる。(つまり、γ-線は、出やすい角度、出にくい角度が存在する。) また、1 つの角度 θ に固定しても、γ線の helicity : $\tau(=\pm 1)$ の値によって、計測数が異なる。(つまり、ある角度に対して、γ-線が放出される量は、helicity に依存する。) この関係を、 $\beta-$ (circular polarized)γ correlation と呼ぶ。次の角分布の式が、今述べた内容を表している。

$$W(\theta,\tau) = 1 + \tau \mathrm{A}\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\cos\theta \tag{1.2}$$

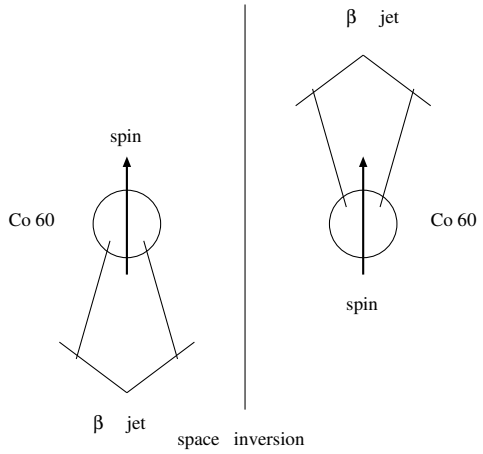


図 1.1: Wu's experiment

ここで v は β線 の velocity である。また、$3^+ \to_\beta 2^+ \to_\gamma 0+$ の崩壊過程においては、理論的に A=$\frac{1}{3}$ が導出される。(Appendix C 参照のこと)

式 (1.2) は $\beta - \gamma$ correlation において Parity が破れていることを示している。

それは何故か？　Figure1.3 を見ていただきたい。左右の図はお互い Parity 反転 の関係にある。つまり、helicity : $\tau = \pm 1$ の 2 つの状態 (θ は一定) が、自然界で等確率で起こりうるならば、β-γ correlation において Parity が保存するということを意味する。しかし 式 (1.2) の中で、(θ が一定の場合)Asymmetry parameter $A \neq 0$ ならば、$\tau = +1$ と$\tau = -1$ で、放出確率が異なることになる。したがって、 Parity が保存しないことになる。

実験においては、式 (1.2) の A の値 (Asymmetry Parameter) が 0 でないことを統計的に示せば、Parity 非保存を実証したことになる。

まず、本実験の scheme を示す。Figure1.4 が本実験の概念図である。Pb の塊を図のように配置することによって、γ 線がγ-counter で検出されるためには、シリンダーの表面で Compton 散乱されなければならない。geometry により許される 角度 θ は $\theta \sim 160°$ なので 式 (1.2) より、^{22}Na から放出される helicity が負 ($\tau = -1$) のγ-線の割合が、正 (τ=1) の γ-線の割合よりも多くなる。シリンダーにはコイルを巻き、そのコイルに電流を流すことで、シリンダー内自由電子の偏極方向をコイルに流す電流の向きで制御することができる。図中に描かれた電流の向きを それぞれ Plus 、Minus と約束しておく。(以下の Chapter でもおなじ約束をする。) 電流によって作られた磁場$\vec{B}$によって、シリンダー内の自由電子の spin は $\vec{B}$と反平行な向きになる。[1]　この偏極した電子とγ線は Compton 散乱をする。

QED の詳細な計算 (Appendix D) から Compton 散乱の断面積が次のように導出される。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta - \tau(1-\cos\theta)\vec{S}\cdot\left(\frac{\vec{k}}{m}\cos\theta + \frac{\vec{k'}}{m}\right)\right] \tag{1.3}$$

[1] spin を持った electron の磁場$\vec{B}$中での Energy U の大きさは U = $\frac{ge}{2m_e}\vec{s}\cdot\vec{B}$ となるので $\vec{s}$と$\vec{B}$が反平行のとき、U が最小となる。

この式から明らかなように、シリンダー内電子の spin の向きと γ線 の spin の向きが反平行に近い方が散乱確率が大きいことが分かる。

ここで、Plus Current(コイルに正電流を流すこと) での β-γ coincidence counts を N_+ 、Minus Current(コイルに負電流を流すこと) での counts を N_- と決めておく。すると、我々の実験では、

$$N_+ < N_- \tag{1.4}$$

であることが予測される。

今、Asymmetry という物理量を次のように定義する。

$$Asymmetry = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} \tag{1.5}$$

式 (1.4) より、 本実験においては

$$Asymmetry < 0$$

となるべきである。

Mathematica を使った Asymmetry の概算値 (Appendix E) は次のようになる。

$$Asymmetry = -0.00471712 \ \frac{v}{c} \tag{1.6}$$

Asymmetry は $\frac{v}{c}$(β-rapidity) に比例し、その比例係数は-0.00471712 程度の値をとると予測される。

実験において得られる coincidence counts N_+ , N_- をまず 式 (1.5) 適用し Asymmetry が 0 でないことを統計的に示せば、式 (1.2) における Asymmetry Parameter : A が 0 でないことを示したことになり、結果、Parity violation を実証したことになる。さらに 実験値から式 (1.6) のような線形関係が得られれば、V-A 理論に基づく$\beta - \gamma$ correlation が予想する

$$A = \frac{1}{3}$$

が、実験的に検証できたことになる。

我々の実験の目的は、実験 Data から Asymmetry の存在を確認し、さらに式 (1.6) の線形関係を検証することである。

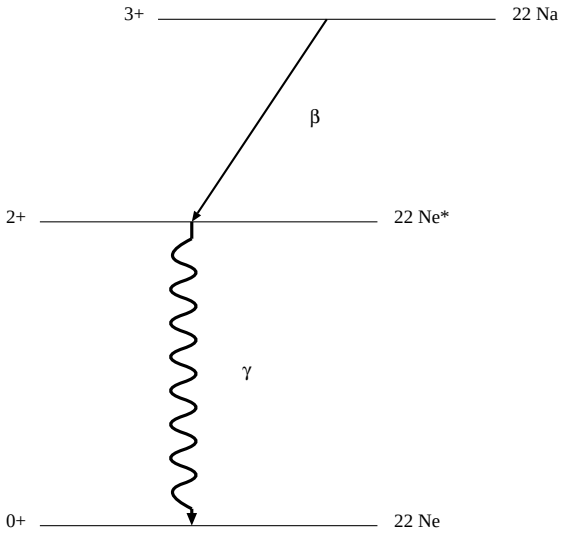


図 1.2: ^{22}Na decay

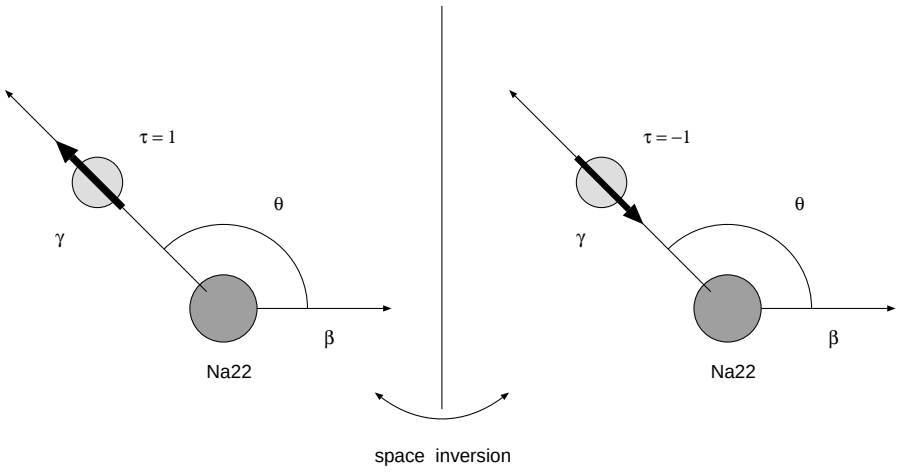


図 1.3: space inversion

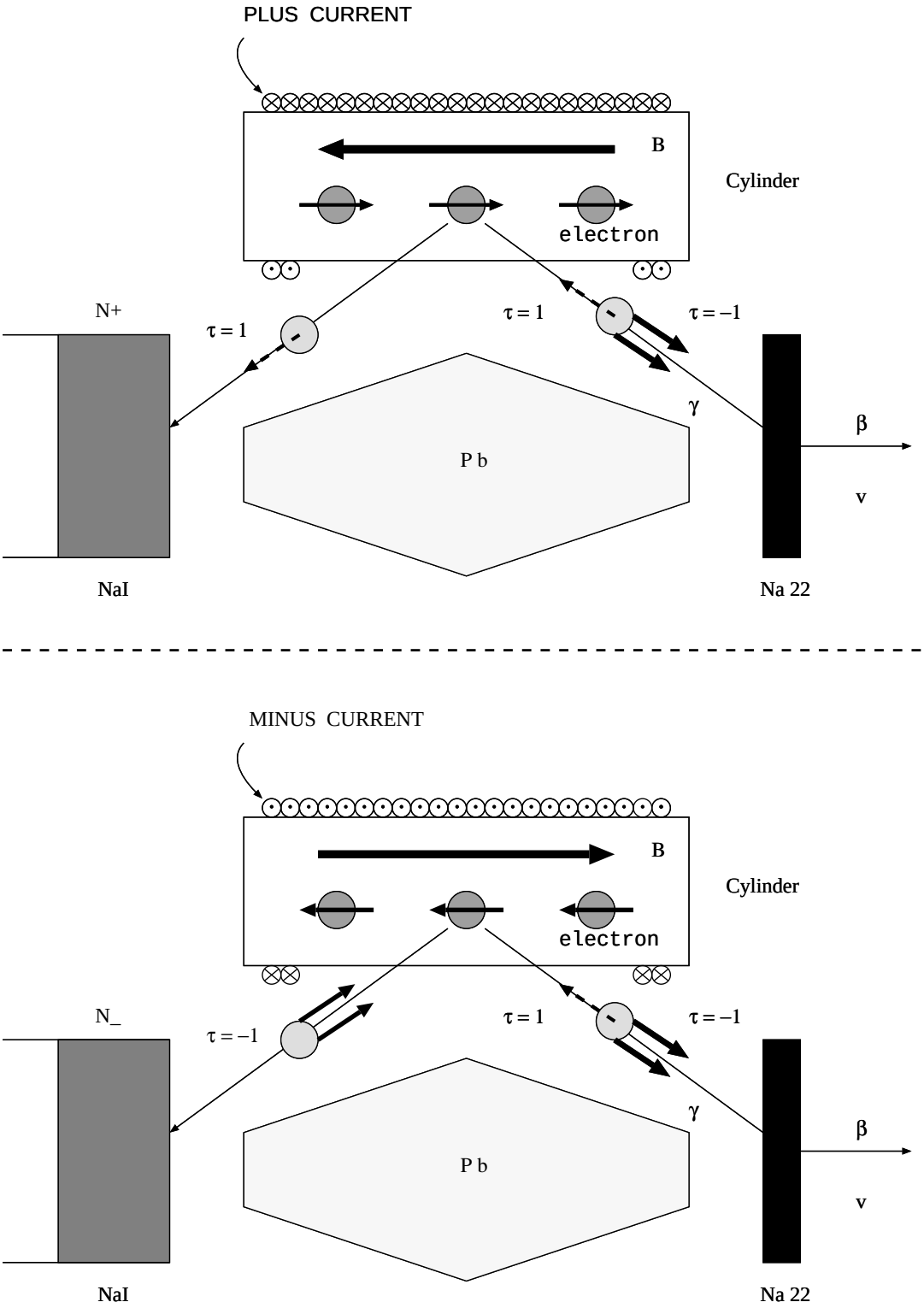


図 1.4: Plus current / Minus current

第2章　Set up & DAQ

2.1　Setupの概要

実験原理から、Figure2.1 ようなセットアップでγ-counter に入る 1275keV のγの量を測定すれば良い。まず

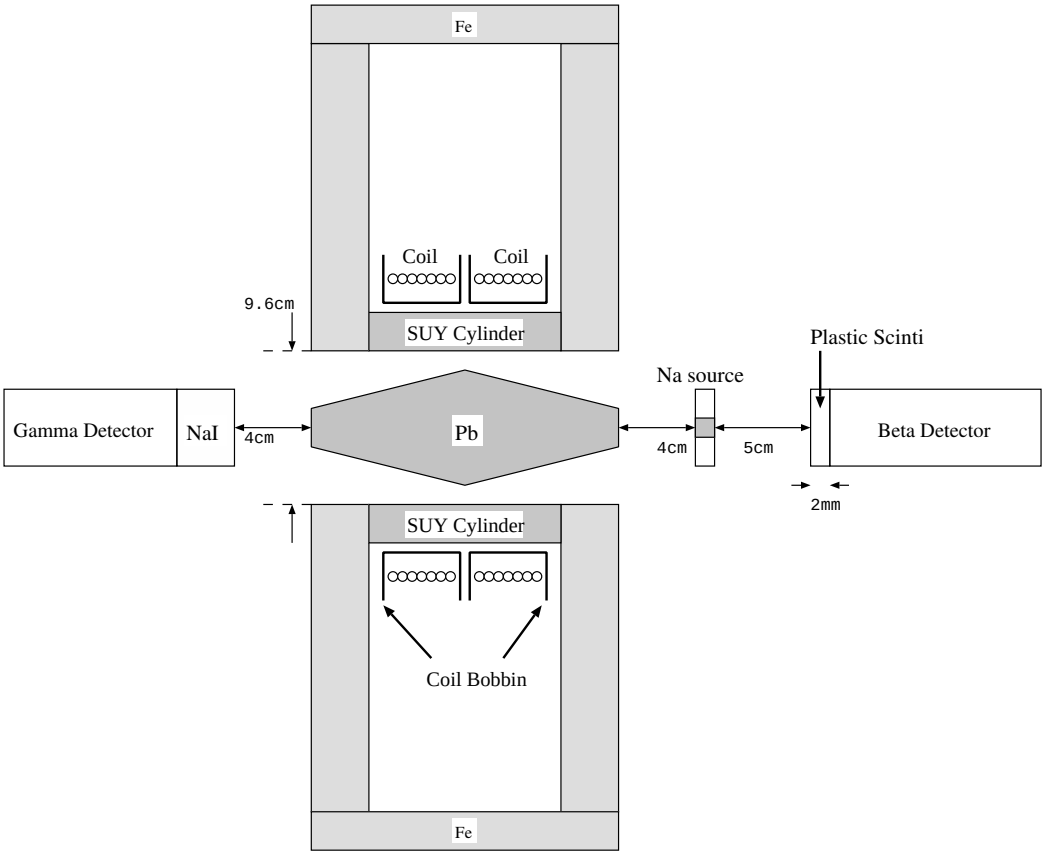


図 2.1: setup の概要

^{22}Na Source(No.10) から出てβ-counter に入るβ線に対して、γ-counter に入るγ線は、一定範囲の角度で Cylinder で散乱したものに限られる。Cylinder にかける磁場の方向を変えることにより、右巻きまたは左巻きのγを選択的により多く散乱させることができる。

Block Diagram は Figure2.2 に示す。PMT からの signal は、Divider で、生 signal と Coincidence 用の signal に別けられる。β 崩壊とγ 崩壊は連続して起こるので、Coincidence

を取ることにより、不要な signal を省くことができる。Coincidence の後、βとγそれぞれに gate を開き、元の生 signal のエネルギーを ADC で測る。ADC のデータの蓄積と、磁場の switch の操作は PC で行う。以下の section では、各ブロックごとに詳細を見ていく。

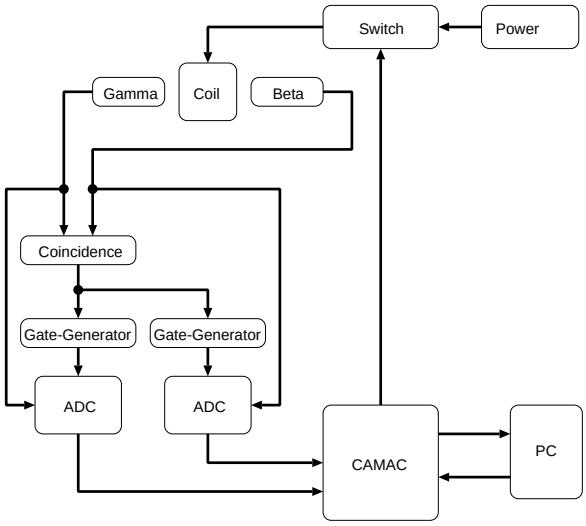


図 2.2: Block Diagram

2.2 Coil

Asymmetry を出すのに必要な偏極コンプトン散乱を多くするために、Scattering Cylinder の磁化を飽和させたい。磁場を強くするにはコイルの巻き数を増やせばよいが、水冷システムは様々な困難を伴うので、発熱量をできる限り抑えたい。磁気回路がすべて SUY で出来ていて軸対称と仮定すると (実際は Cylinder のみ SUY で筐体は直方体)、SUY 内部の磁場を 2 テスラ近くに飽和させるのに必要な電流量は、約 800A である。Cylinder 以外は普通の鉄であることを考慮し、この 2 倍の 1600A を流したい。そこで、直径 1.5mm の銅線を 200 巻したもの 2 個に、4A の電流を流すことにした[1] 。この場合、銅線の抵抗は各約 1.1 ~ 1.2Ωなので、発熱量は 40W 程度である。

磁場方向の反転は、始め手動で行っていたが、DAQ の改善のため、RelayMPX という CAMAC モジュールを使って、リレースイッチを切り替えるように改めた。これにより、PC から自動で磁場方向を control できるようになった。

[1] より詳しい計算は Appendix F を参照せよ

2.3 Detector

β-counter

理想的なβ-counterは、β線のみに反応するものである。最も大きなノイズとなるのは、γ線によるコンプトン散乱である。これをできる限り除くために、非常に薄い、厚さ2mmのPlastic ScintillatorをLightGuideを介してPMTに接続した。本実験では磁場が変動するので、磁場によるPMTのgainの変化を防ぐため、LightGuideを接続してPMTを磁場から遠ざけている。PMTも通常のLineFocus型ではなく、磁場変動の影響を受けにくいFineMesh型のものを使用している。さらに、PMTをμ-Metalで覆い、その上を鉄の円筒で覆って磁気シールドにしている。

PMTに供給するHigh-Voltageは、ADCのchがある程度の大きさになり、かつ電圧が高いことによるノイズがあまりない、という条件を満たすように、1.7kVに設定した。

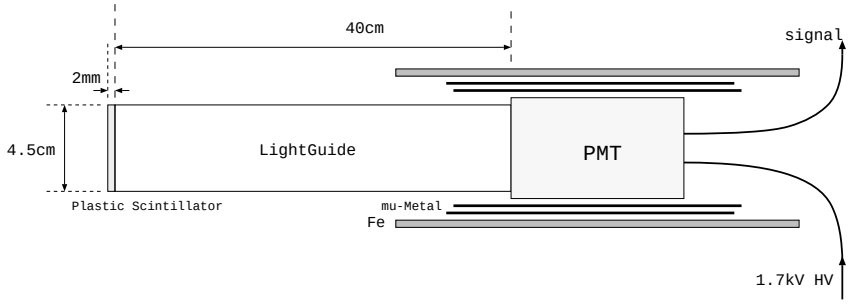


図 2.3: β-counter

γ-counter

γ線のdetectは簡単である。大型のNaI ScintillatorをやはりLightGuideを通してPMTに接続する。β-counter同様、PMTはFineMesh型で、磁気シールドも上に同じである。

PMTに供給するHigh-Voltageは、Dividerで分けた後のsignalの深さが、Discriminatorの信頼性の限度である-16mVよりも深くなるように、1.5kVに設定した。ADCのchや、電圧が高いことによるノイズは優先しなかった。

2.4 NIM&CAMAC

Discriminator

β-counter,γ-counterからのsignalは、それぞれDividerで2つに分けられ、一方がlow noiseを除くためにDiscriminatorを通って、Pulseに変わる。Pulse幅は、accidentalなcoincidenceを避けるため短い方がよいが、γ側のsignalは立ち上がりの鈍さからzitterが大きいため、必要なcoincidenceが得られるように、β, γとも40nsにした。

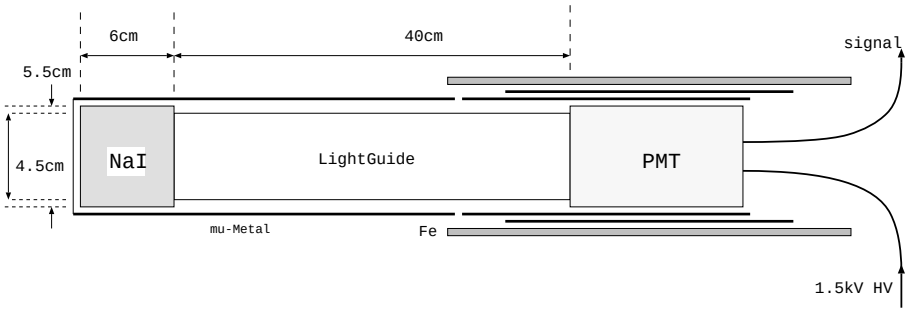


図 2.4: γ-counter

γの Pulse は、元の生 signal が綺麗でないために、最初のパルスから数百 ns 遅れた辺りに同じ signal による Pulse が出てしまう。これを消すために、self-veto をかけた。βはそれほど必要性はなかったが、気休めのために同じく self-veto をかけた。

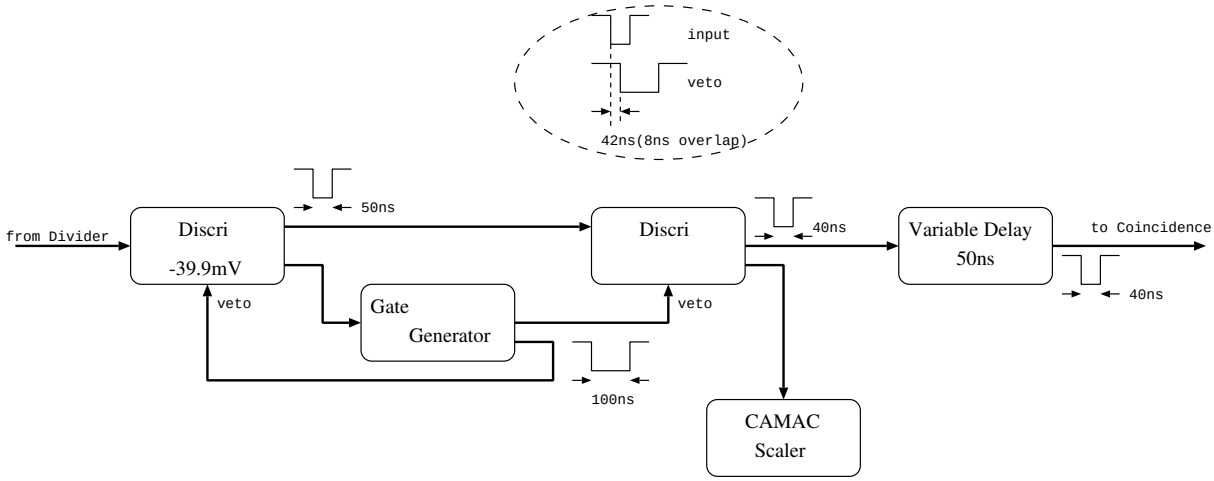


図 2.5: β-signal 側

Delay

546keV のβ線と 1275keV のγ線はほぼ同時に出るが、β-counter の signal の立ち上がりが速いのに対して、γ-counter の signal は立ち上がりが鈍い。そのためγ側のシグナルは、threshold にかかるまでに 50ns 程度の遅れが生じる。そこで、β-Pulse とγ-Pulse にそれぞけ delay をかけた時の coincidene rate を調べ、最適な delay を探す。

十分な delay をかけたときの coincidence rate が、accidental な coincidence rate と言える。

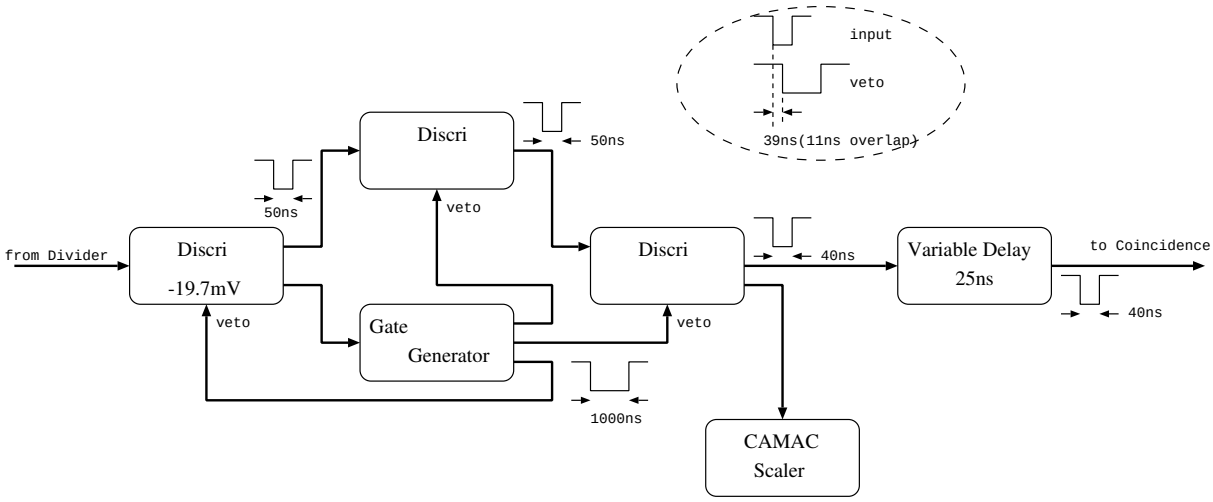


図 2.6: γ-signal 側

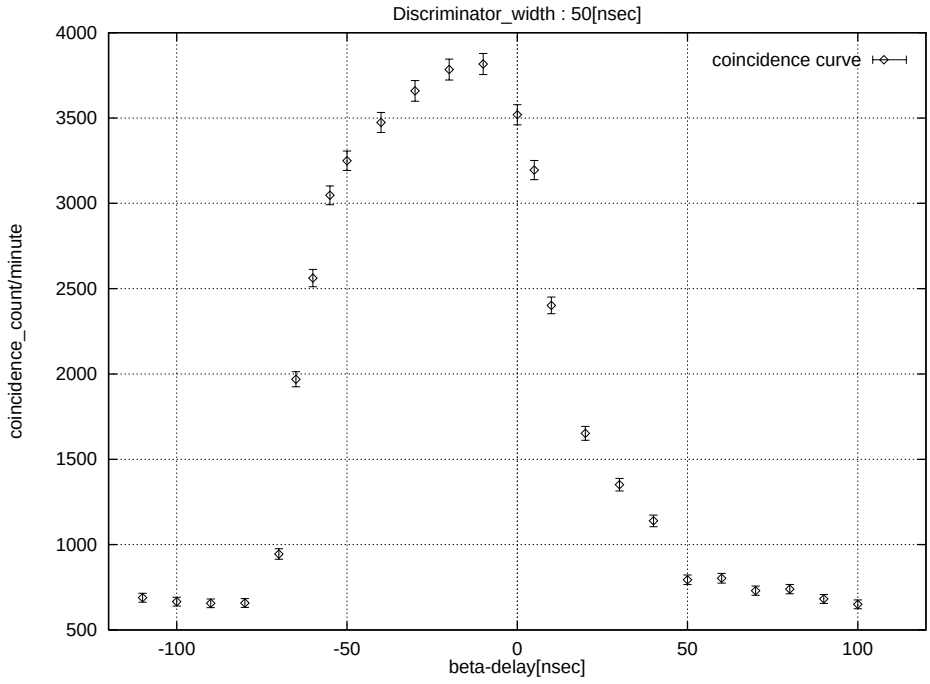


図 2.7: Coincidence Rate

Trigger

βとγで coincidence を取った Trigger は、β用γ用それぞれの Gate-Generator に入る。

β用 Gate は、生 signal に対して 60ns ぐらい余裕を持たせて、ADC にいれる。生 signal は HighPassFilter (R=1kΩ,C=0.01μF) を通して交流成分[1] を除いている (副作用として、signal が + に跳ね返る)。

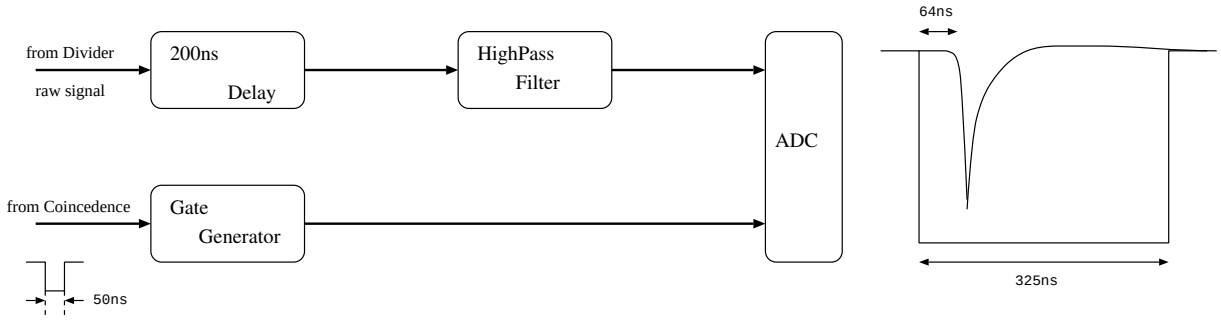


図 2.8: β-signal 側

γ用 Gate は、生 signal が乱れていて、立ち上がりの前に段ができているので、これを Gate 内に収めるために、500ns もの余裕を持たせた。生 signal は、やはり HighPassFilter (R = 100Ω,C = 1μF) を通したが、こちらは副作用の + への跳ね返りはあまりなかった。

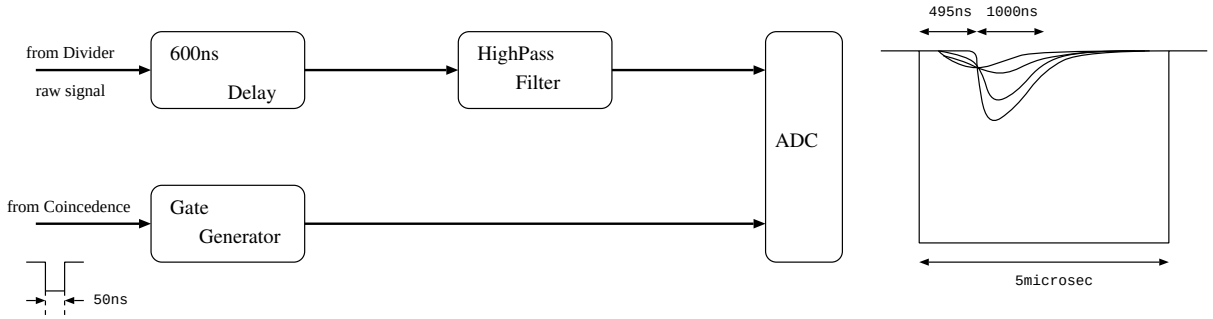


図 2.9: γ-signal 側

[1] 35kHz ぐらいのもので、pedestal の twin peaks の原因と考えられる。

2.5 DAQ

2.5.1 ADC data

Triggerで作られたGate Pulseで、PMTの生signalをADCに読み込み、それをCAMACを通してPCに渡す。Gate-Generatorに対するVetoは、Gate Timeの長いγのGate Pulseを ELRに入れて行っている。

Asymmetryの測定は、つまるところcount数の多い少ないである。Asymmetryの他に、count数を変化させる要素としては、磁場反転によるPMTのgainの変化、供給HighVoltageの変動によるPMTのgainの変化などがある。前者はNull-Asymmetryの測定により、影響の有無を確認できる。後者については、出来るだけ頻繁に、しかもrandomに磁場を反転させれば、影響を無くすことができる。本実験では、100secのrun time →磁場反転→20secのsleep time→100secのrun time→... という繰り返しを自動化して行った。

1eventは、βのADCの値(ch)とγのADCの値(ch)の組で構成され、run timeごとに1fileが生成される。1turnは、磁場が正の時のevents fileと負の時のevents fileの組で構成される。Asymmetryの測定は、だいたい600turnごとにCalibrationをしながら、行なった。

2.5.2 counts number

先に、HighVoltageによるgainの変化を挙げたが、これが実際どの程度なのかは、実験中ずっと見張ってないと分からない。そこで、CAMAC scalerを用いて、1runtimeごとに、β,γそれぞれのsingle rateをfileのEnd Commentに書き込むことにした。

2.5.3 磁場反転

Switchingの方法は、Relayを使ったいたって簡単な方式である。Coilに供給するPower Supplyからの電流を1次Relayで切り替え、1次Relayの制御用電流の導通/切断をCAMAC moduleのRelayMPXで制御した。

第3章　DATA & 解析

3.1　Calibration & Resolutions

我々の作成した β、γ 両 counter はそれぞれ以下のように Calibration (較正) する。

- β側
  ^{137}Cs の ConversionLine 630kev(K-、L-、M-line での重み平均) [1] の単色β^- 線を用いて、Calibration する。この Calibration により^{22}Na からのβ^+線 spectrum を $KuriePlot$ [2] に変換し
  1. $Plot$ の直線度は高いか。
  2. $Plot$ の $Energy$ 切片 は β^+線の最大 $Energy$: 545kev に接近しているか否か。

  の 2 点を検討することで Calibration の正当性を示す。

- γ側
  ^{22}Na からは$\beta^+\beta^- \to 2\gamma$ による 511kev のγ線と 1275kev のγ線の 2 種が放出されるが、pedestal の channel と 1275kev-γ の channel で決まる Calibration 直線から 511kev-γ の channel を 予測した時に実際の 511kev-γ の channel と何 (%) ずれているかによって、この Calibration の正当性を check する。

＊以上の Calibration を各実験の Run 開始直前、終了直後に行う。
本実験で用いたβ-couter、γ-counter の各々の Resolution(FWHM) は Table3.1 の通り。

[1] Conversion Line についての詳細は Appendix G 参照のこと
[2] Kurie Plot についての詳細は Appendix H を参照のこと

β-counter	^{137}Cs:630kev ConversionLine-peak	31.9(%)
γ-counter	^{22}Na:511kev photo-peak	11.9(%)
	^{22}Na:1275kev photo-peak	11.5(%)

表 3.1: detector resolutions

3.2 解析方針

本実験の set-up の geometry から Analyzer で Compton 散乱されるγの散乱角：θ_{scatt}は

$$22.0^\circ \leq \theta_{scatt} \leq 73.5^\circ \tag{3.1}$$

である。(Figure3.1 参照。)

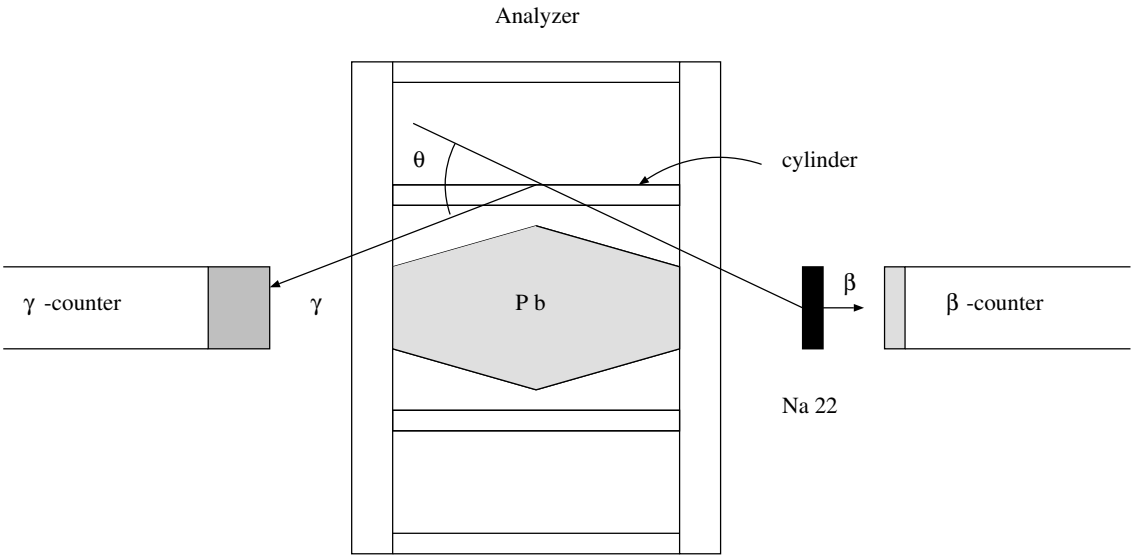


図 3.1: geometry

ここで Compton 散乱に対する公式より、入射γ線の Energy を $h\nu$、散乱γ線の Enerygy を $h\nu'$、散乱角をθ_{scatt}とすると

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + x(1 - cos\theta_{scatt})} \tag{3.2}$$

ここに

$$x = \frac{h\nu}{511}$$

なので (3.1)、(3.2) より、入射γ線が 511kev-γ,1275kev-γのそれぞれの場合について、scattered-γの取りうる Energy Range は

$$298.8\text{kev} \leq \gamma_{511} \leq 476.3\text{kev} \tag{3.3}$$

$$457.5\text{kev} \leq \gamma_{1275} \leq 1078.9\text{kev} \tag{3.4}$$

となり 2 者の Energy Range にわずかに重なりが見られる。

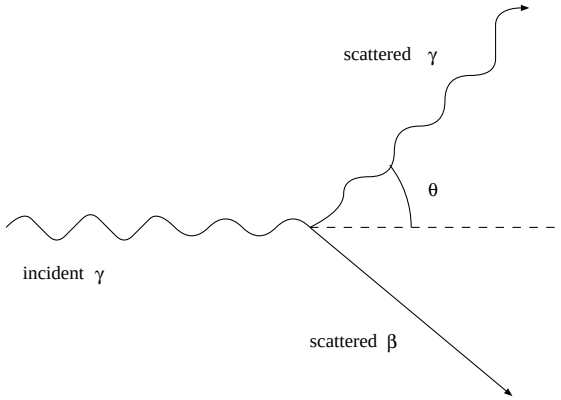


図 3.2: compton scattering

我々の実験で得られるγ-counter 側の典型的な ADC spectrum を Figure3.3 に示す。

γ_{511}の Energy 領域に際立った peak があり、γ_{1275}の Energy 領域になで肩状の「丘」が見られる。

解析上、我々の取った解釈は

- $\beta - \gamma_{511}$ coincidence...Null Asymmetry event
  この領域で cut した event では$\beta - \gamma$ correlation が無く、物理的に Asymmetry が見られてはならないはず。(以下 Null Asymmetry と呼ぶ。) 実際のデータ解析ではこれが Null になっている、つまり原点調整のできている Run のみ有効なデータとする。

- $\beta - \gamma_{1275}$ coincidence...Asymmetry event
  この領域で cut した event こそ$\beta - \gamma$ correlation が見られ、Asymmetry が現れるべき。

というものである。

ここで問題になるのは、上に述べたようにγ_{511}とγ_{1275}の Energy Range が重なっているので、「1 つの data」からγの Energy により適当に soft-cut して Asymmetry data、Null Asymmetry data の 2 つの data を抽出するとき、どのようなγ-Energy の cut 条件を設けるのが適当かを合理的に見いだすことである。cut 条件を甘くすると結果に悪影響を及ぼしかねないし、逆に厳しくすると有効 event 数が減少してしまう。以下、この cut 条件を optimize する方針を Asymmetry 領域、Null Asymmetry 領域、各々について見ていくことにする。

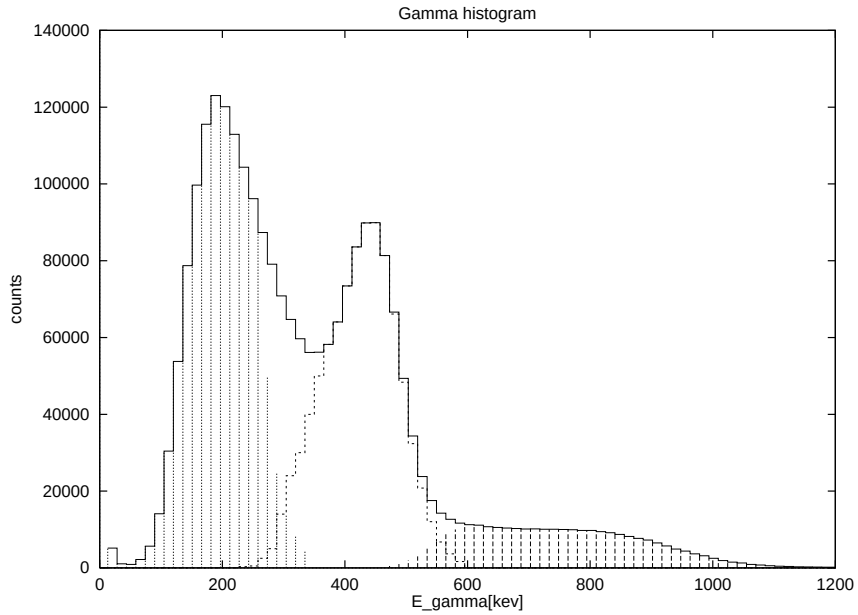


図 3.3: typical γ spectrum

- Asymmetry 領域の soft-cut 条件について
  soft-cut する γ の最大値は 1078.9kev として問題はないだろう。

$$\gamma_{Asym}^{min} \leq \gamma_{Asym} \leq 1078.9\text{kev} \tag{3.5}$$

  におけるγ_{Asym}^{min}の最適値 ${}^{*}\gamma_{Asym}^{min}$を見いだす為に、$\gamma_{Asym}^{min}$を小さい値から一定の step で大きい値に shift しながら (3.5) の cut 条件を動かしていったとき、γ_{Asym}^{min}の関数として Total Asymmetry(βの全 Energy 領域における和) を示したのが Figure3.4 である。
  $\gamma_{Asym}^{min} \simeq 600\text{kev}$ 付近で値が安定しているのが分かる。従って、

$${}^{*}\gamma_{Asym}^{min} = 600\text{kev}$$

  と決定する。

  geometry より決まるγ_{511}の最大値 (476.3kev) より 100kev 以上高い値であるが、γ-counter が有限の resolution を持つために、600kev 付近まで 511kev-γの影響が滲み出していると考えられる。

- Null Asymmetry 領域の soft-cut 条件について
  geometry より決まるγ_{1275}の最小値は 457.5kev であるが、Figure3.3 より、この付近における 1275kev-γ の event は 511kev-γ の event に比べて圧倒的に少ないので、γ_{Null}の最大値を 457.5kev に設定しても Asymmetry 領域の影響の滲み出しは無いと考えられる。そこで、

$$\gamma_{Null}^{min} \leq \gamma_{Null} \leq 457.5\text{kev}$$

におけるγ_{Null}^{min}の最適値 ${}^{*}\gamma_{Null}^{min}$を全く同様に Figure3.5 より求めると、

$${}^{*}\gamma_{Null}^{min} = 350\text{kev}$$

となる。

geometry より許されるγ_{511}の最小値 (297.8kev) より 50kev 程大きいのは、γ-couter に印加した HV が高かった為に、低 Energy 領域では Noise を拾ってしまっているからであると考えられる。

以上をまとめると、Asymmetry 、 Null Asymmetry 領域の cut 条件は Table3.2 の通りになる。

	γ-Energy	β-Energy
$Asymmetry \quad Range$	$600\text{kev} \leq \gamma_{Asym} \leq 1079\text{kev}$	$150\text{kev} \leq \beta \leq 545\text{kev}$
$Null - Asymmetry \quad Range$	$350\text{kev} \leq \gamma_{Null} \leq 458\text{kev}$	

表 3.2: cut condition

＊ βの最小 Energy は Discriminator の threshold 値によって決まった。

最終的な cut の様子をβ spectrum(Figure3.6)、 γ spectrum(Figure3.7) の各々について示しておく。

3.3 解析手順

本実験で行われた解析の流れを Figure3.8 に示す。図中に示された各 step ごとに詳細を見てゆく。

- step1 : cut
  Analyzer に流す電流の向きを +(plus)、−(minus) にしたときの各々の event を記録した生の file を raw-file と呼ぶ。(注:raw-file は plus 、minus の 2 つある。) 各 raw-file は 1 event ごとに β-channel 、γ-channel が 1 行に並んでいる。前節の cut 方法に従い γ-channel の値が cut 条件を満たしている event のみβ-channel を新しい file(cut-file) に書き出す。

- step2 : calibration
  前節で述べた Calibration 法により cut-file を calib-file に変換する。

- step3 : histogram
  calib-file から 1bin $\simeq$ 60kev とする histogram を作り hst-file に結果を書き出す。

- step4 : asymmetry
  2 つの hst-file からβの各 Energy Range について

$$\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{E_\beta(E_\beta + 2m_e c^2)}}{E_\beta + m_e c^2}$$

$$Asymmetry = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}$$

$$\sigma_{Asym} = \sqrt{\frac{1 - Asymmetry^2}{N_+ + N_-}}$$

  を計算し、asym-file を作成する。

- step4′ : kurie plot
  hst-file から $Kurie\ Plot$ を作成する。(kr-file)。

- step5 : fit
  最後に asym-file の plot を

$$Asymmetry = a\ \frac{v}{c}$$

  の形に fit し、比例定数 a の値を求める。また、この plot が「原点を通る直線にのる」とした、そもそもの仮定が正しいかを議論するために、χ^2検定を行ない CL (Confidence Level) を求める。

＊以上が Run ごとの解析手順であるが、こうして得られた複数の Run の結果を、最後に統計学[3] にしたがって 1 つの data にまとめることにする。

[3] 本実験の解析に用いた統計学については Appendix I を参照のこと

3.4 DATA

Run は 4/29 ∼ 5/25 の期間に全 5 回行った。これらのうち Null Asymmetry が見えている 3 回の Run についての Data を Table3.3 に示す。

Run number	date	Turn 数	runtime/sleeptime	Total count(coin)
Run1	4/29 ∼ 4/30	599	100sec/20sec	$N_+ = 3352057$ $N_- = 3356751$
Run2	5/7 ∼ 5/8	600	100sec/20sec	$N_+ = 3371534$ $N_- = 3373956$
Run3	5/23 ∼ 5/24	600	100sec/20sec	$N_+ = 3277576$ $N_- = 3284024$

表 3.3: run

これら 3 つの Run 合計での有効 event 数 は $N_{effect} = 1783407$(events) なので、Asymmetry の誤差 σ_{Asym} は、

$$\sigma_{Asym} \sim \sqrt{\frac{1}{N_{effect}}} \sim 0.00075$$

となり、Mathematica の計算で得られる Asymmetry の Order より、1 桁小さい。このことから、統計量としては、以上の 3 つの Run で十分と言える。

これらの Run における典型的な counting rate を Table3.4 に示す。

β-condition	γ-condition	rate			Fraction of	
		N_β-single	N_γ-single	N_{coin}	Accidental-coin	$\gamma\gamma$-coin
112.5kev $\leq \beta$	173.1kev $\leq \gamma$	46.3(kHz)	3.6(kHz)	56.0(Hz)	17.9(%)	26.0(%)
150kev $\leq \beta$	600kev $\leq \gamma \leq$ 1079kev	——	——	5.1(Hz)	——	——
	350kev $\leq \gamma \leq$ 458kev	——	——	12.2(Hz)	——	——

表 3.4: counting rate

＊注 1... Accidental coincidence の寄与の測定は coincidence 入力のうちの一方に人工的に delay を 加えて行われた。

＊＊ 注 2 ... $\gamma\gamma$-coincidence の寄与の測定は β-couter の前にプラスチックシンチレーターの板を置き、β^+を遮断することによって行われた。

3.5 解析結果

以上の解析方針に基づいて、本実験から得られた最終結果を示す。各 Run ごとの Asymmetry 、Null Asymmerty を Figure3.9 ∼ Figure3.14 に示し、最後にこれらの結果を統計的にまとめたものを Figure3.15 ∼ Figure3.16 に載せる。

一方、我々の実験の Set-Up から得られるべき Asymmetry は、Mathematica の数値計算 (Appendix E 参照のこと) より求められており、

$$\text{理論値} : Asymmetry = -0.00471712 \ \frac{v}{c}$$

である。

これらの結果を Table3.5 にまとめておく。

Run number	Asymmetry / Null Asymmetry	χ^2	ν	CL(%)
Run1	Asym = $(-0.006160 \pm 0.002036\ ) \frac{v}{c}$	1.512796	5	91.16(%)
	Null = $(-0.000370 \pm 0.001319\ ) \frac{v}{c}$	9.027395	5	10.80(%)
Run2	Asym = $(-0.003067 \pm 0.002055\ ) \frac{v}{c}$	2.241883	5	81.48(%)
	Null = $(\ 0.000142 \pm 0.001296\ ) \frac{v}{c}$	4.057186	5	54.12(%)
Run3	Asym = $(\ -0.006265 \pm 0.002039\ ) \frac{v}{c}$	3.112555	5	68.26(%)
	Null = $(0.001839 \pm 0.001361\ ) \frac{v}{c}$	5.647826	5	34.20(%)
Total	Asym = $(-0.005156 \pm 0.001177\ ) \frac{v}{c}$	0.537604	5	99.07(%)
	Null = $(0.000498 \pm 0.000763\ ) \frac{v}{c}$	3.865150	5	56.90(%)
Theory	Asym = $(-0.00471712) \frac{v}{c}$	—	—	—

表 3.5: Asymmetry / Null Asymmetry

また各 Run における Calibration の精度は Table3.6 の通り。

Run number	E_β^{max}	error at 511kev-γ photo-peak
Run1	537.5kev	3.13(%)
Run2	545.0kev	2.54(%)
Run3	564.8kev	2.94(%)

表 3.6: Calibration

* E_β^{max} は $Kurie\ \ Plot$ の fitting より得られた値である。各 Run における $Kurie\ \ Plot$ の様子を合わせて掲載しておく。(Figure3.17∼ Figure3.19。)

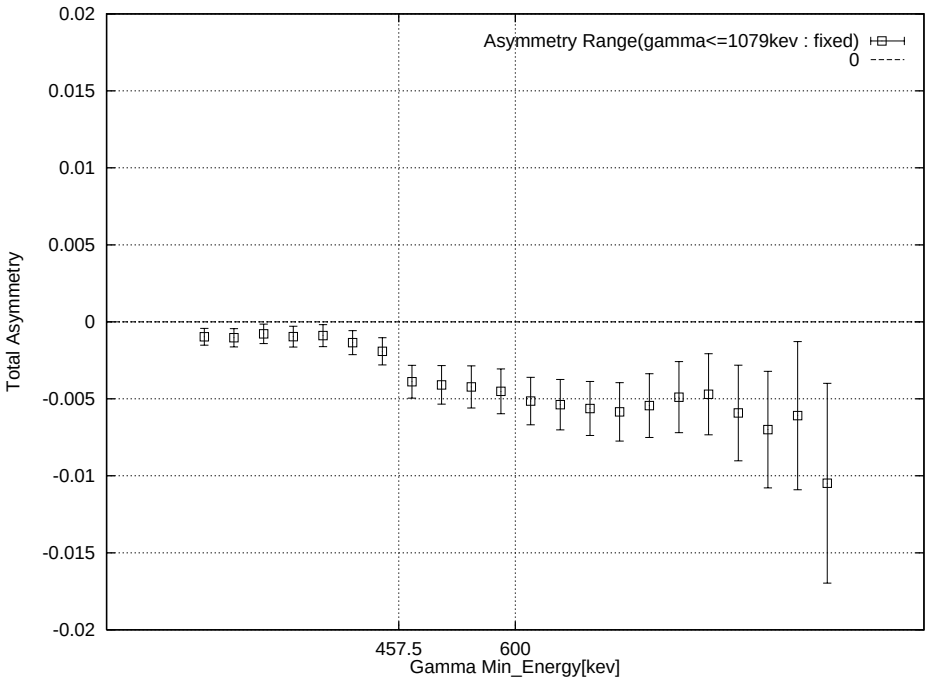


図 3.4: determination of γ-threshold (Asymmetry Range)

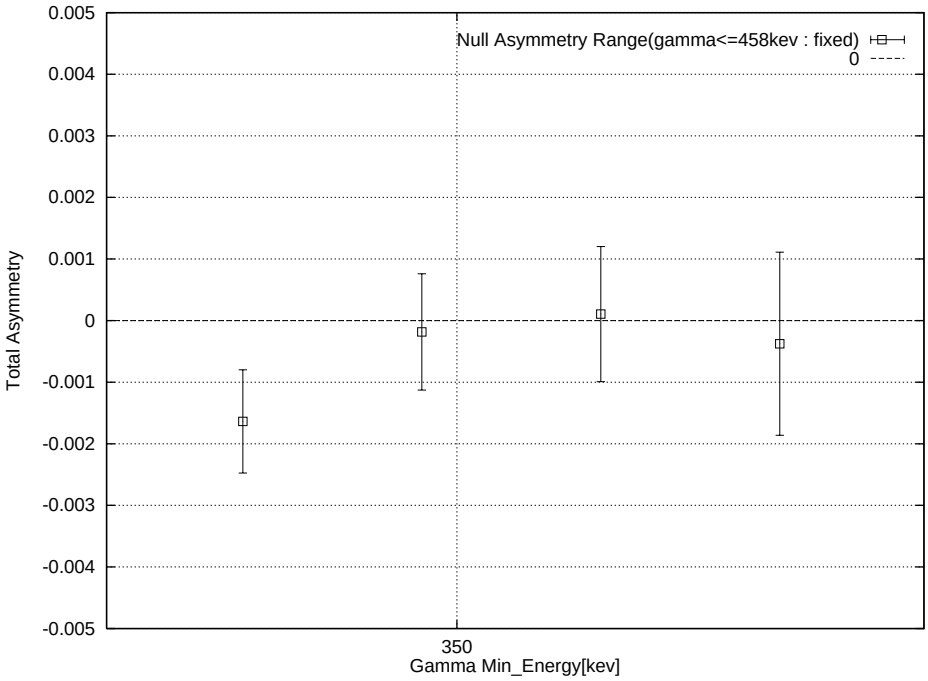


図 3.5: determination of γ-threshold (Null Asymmetry Range)

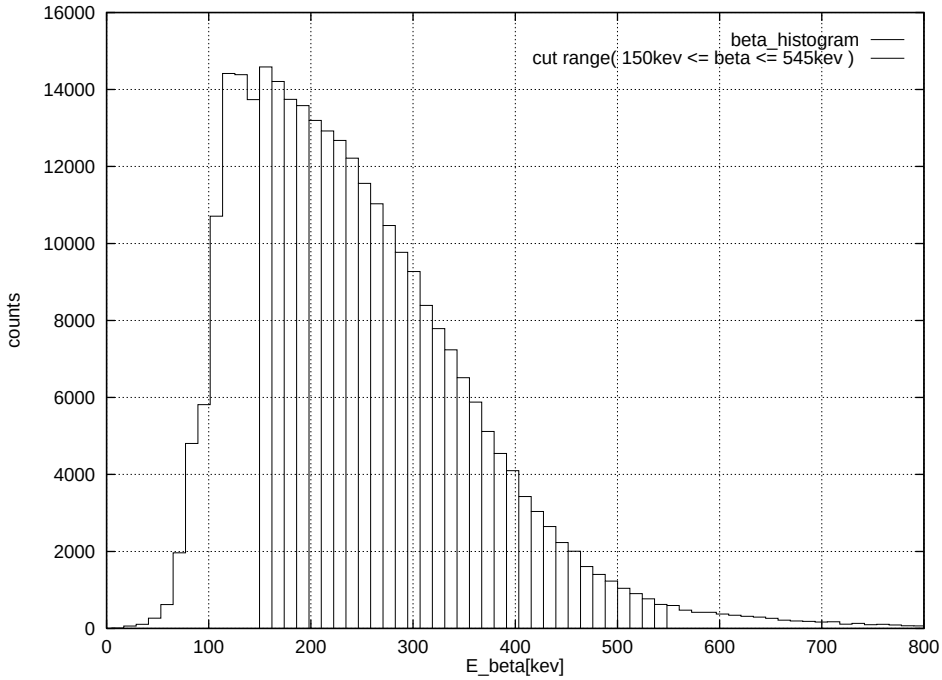


図 3.6: β cut condition

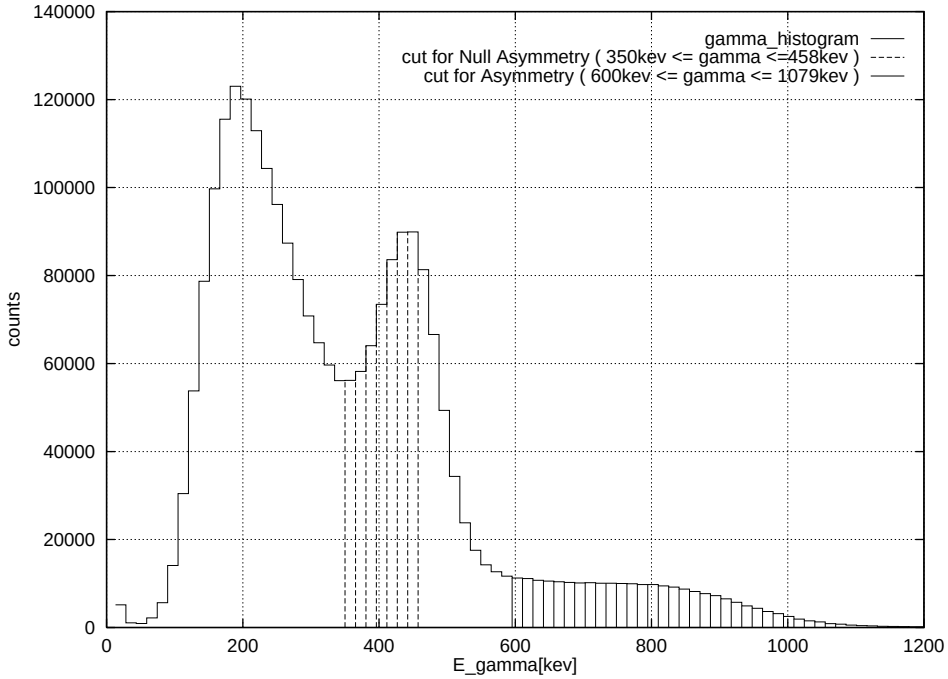


図 3.7: γ cut condition

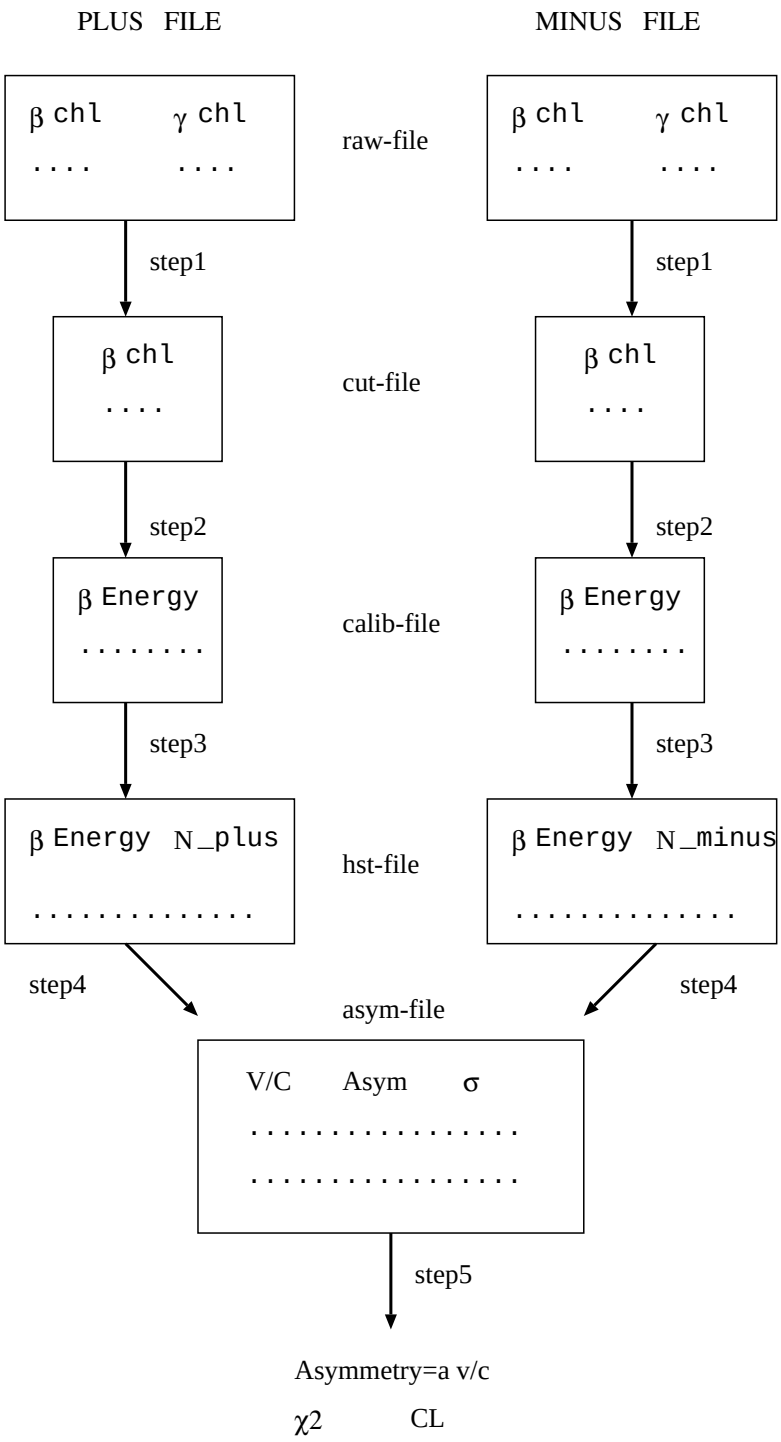


図 3.8: flow chart

3.6 Null Asymmetry についての補足

物理的に考えて Null Asymmetry となるべき事象で Asymmetry が現れてしまった場合、その主要な原因は Analyzer からの漏れ磁場による PMT の Gain 変化であると考えられる。

例えば Figure3.20 のように、磁場の +、− 反転により PMT の Gain が変化し、spectrum が平行移動 (shift) してしまったとしよう。この spectrum を Asymmetry に変換すると、spectrum の極値付近で zero-crossing が見られることになる。 つまり、set-up の Null Asymmetry 調整 (原点調整) がうまくいっていること確かめるのに、

- Null Asymmetry となるべき物理事象を観測したときの Asymmetry に spectrum の極値に対応した zero-crossing が見られない。

ことを確認すればいいということになる。但し、この測定は 実際の Run の最中に Real Time で モニター できないので、あくまで「Null Asymmetry の補足的な check」に用いる。

我々の選んだ scheme は

- Analyzer 中の Pb 塊 を取り除き、本実験の Run と同じく $\beta - \gamma$ coincidence で data taking する。

というものである。このとき、event rate が適度な値 ($\sim$ 200Hz) となり、コンピューターの処理速度 ($\sim$ 600Hz) を越えることはない。

この条件で測定した spectrum 、及び Null Asymmetry をβ 、γ 両方について Figure3.21 $\sim$ Figure3.24 に載せる。β 側については spectrum に 極値がないので 上で述べた check には 使えないが、参考までに載せておく。

これらの結果を見るに、spectrum の極値に対応した zero-crossing はあからさまには現れていないと結論できる。つまり「set-up の Null Asymmetry 調整がうまくいってる」ことが、この結果からも裏付けられたということができよう。

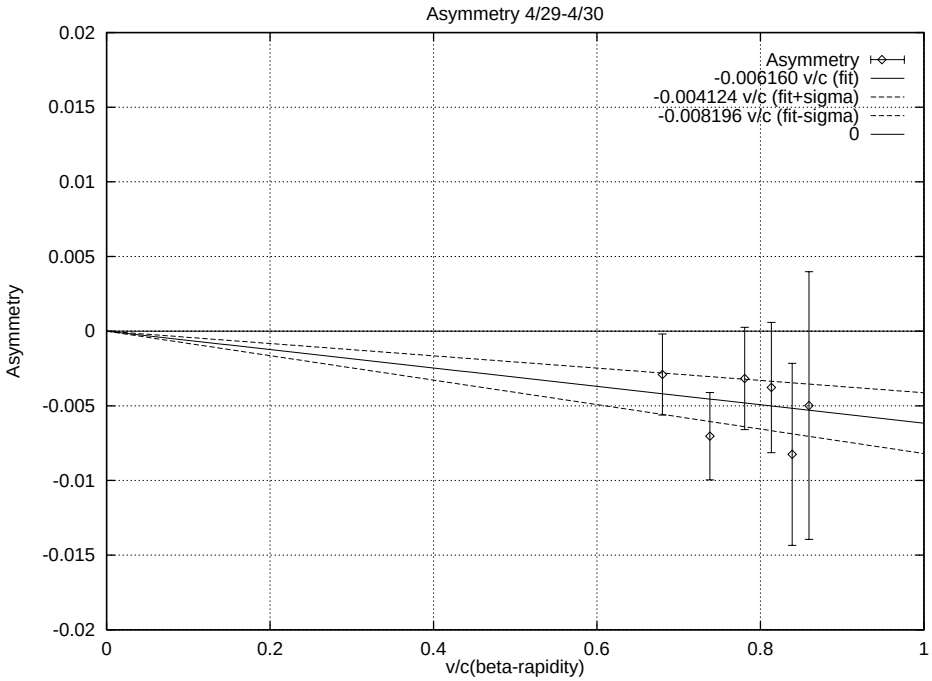


図 3.9: 4/29-4/30 Asymmentry

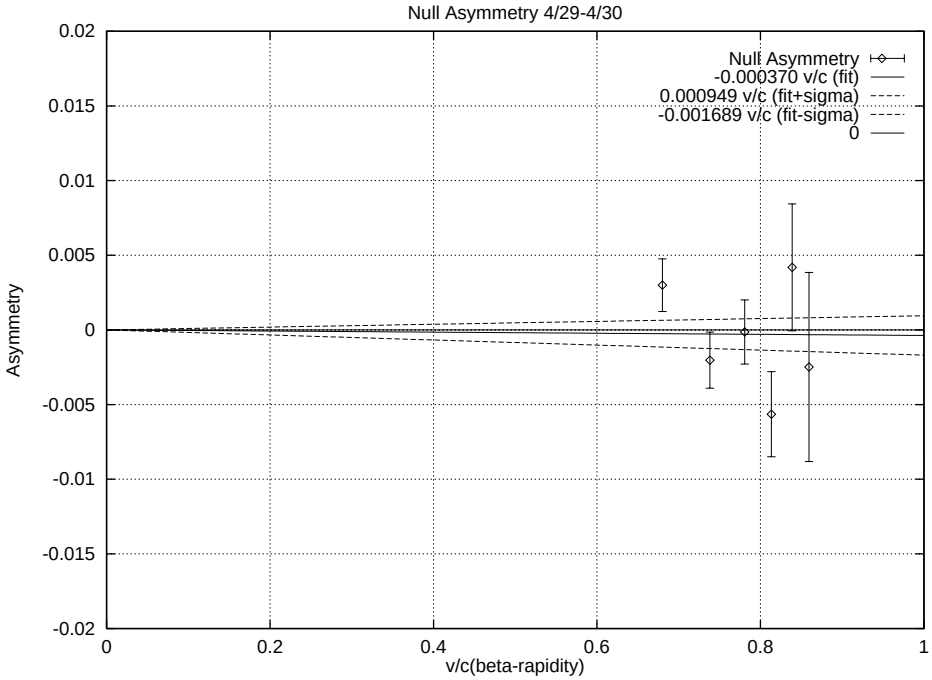


図 3.10: 4/29-4/30 Null Asymmetry

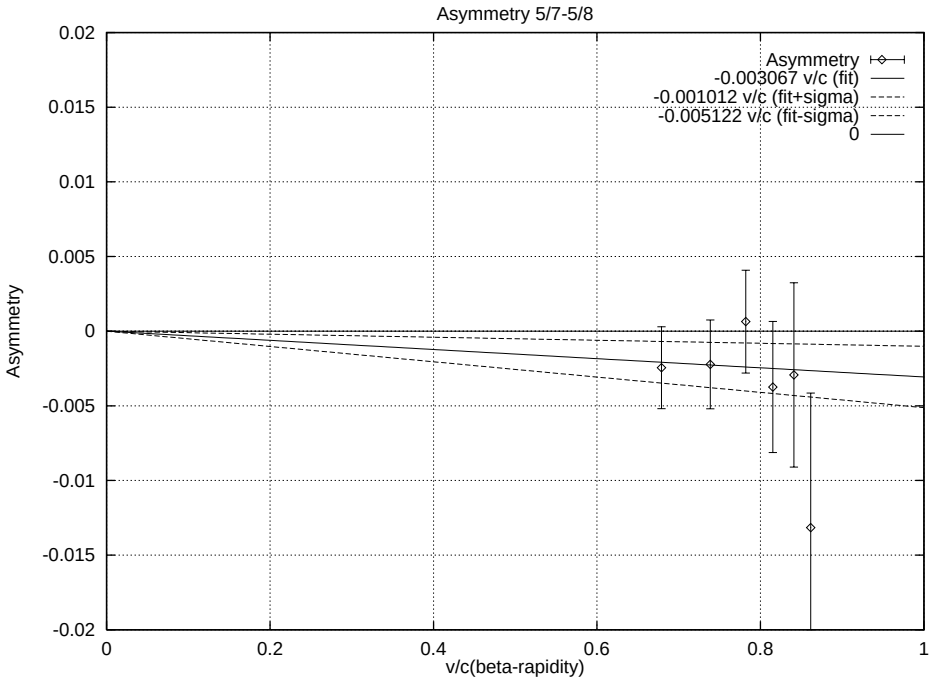


図 3.11: 5/7-5/8 Asymmetry

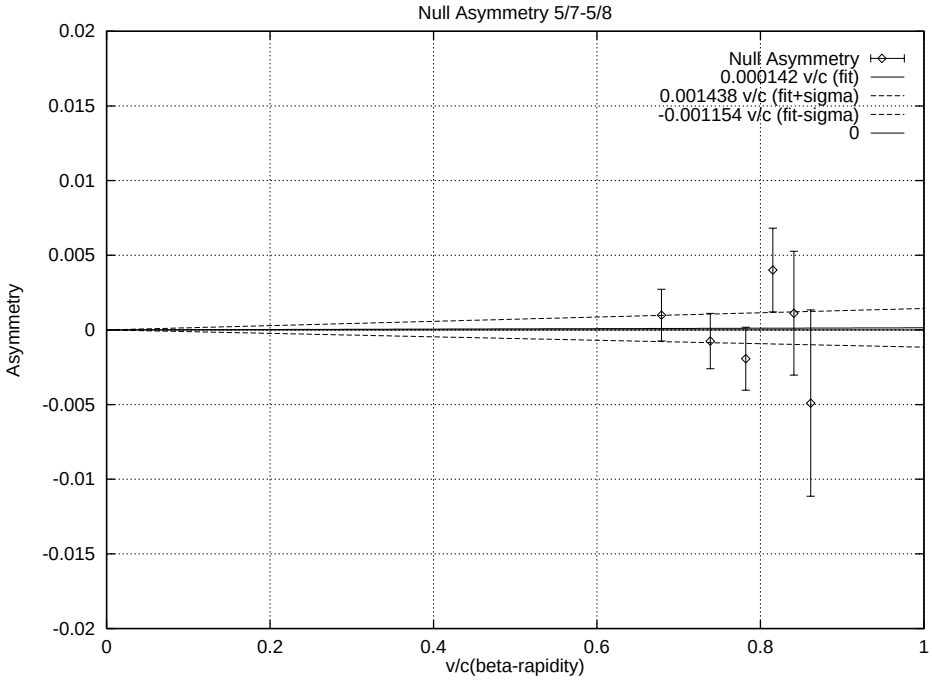


図 3.12: 5/7-5/8 Null Asymmetry

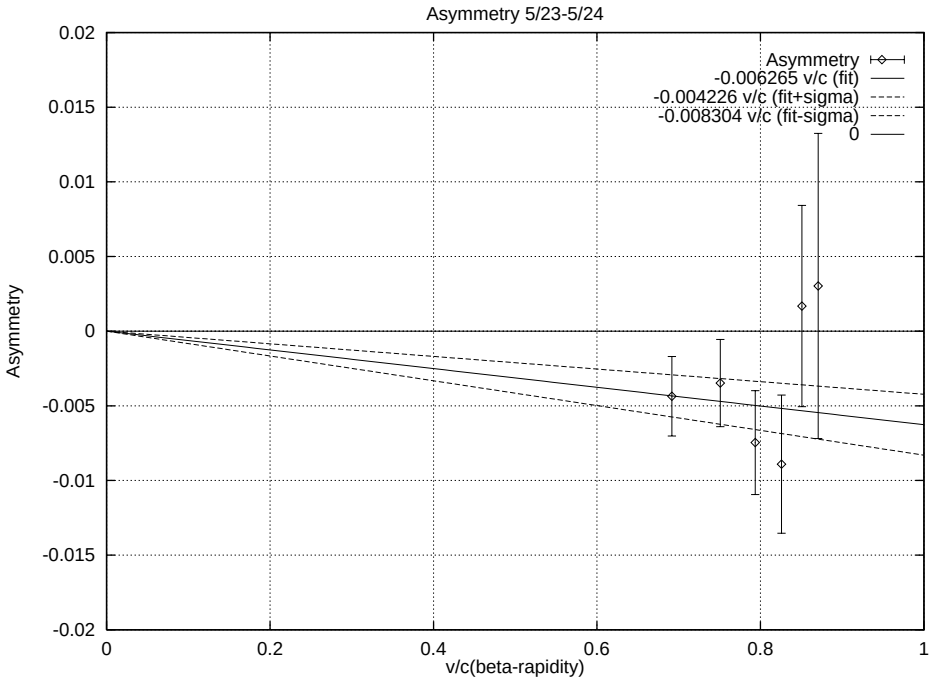


図 3.13: 5/23-5/24 Asymmetry

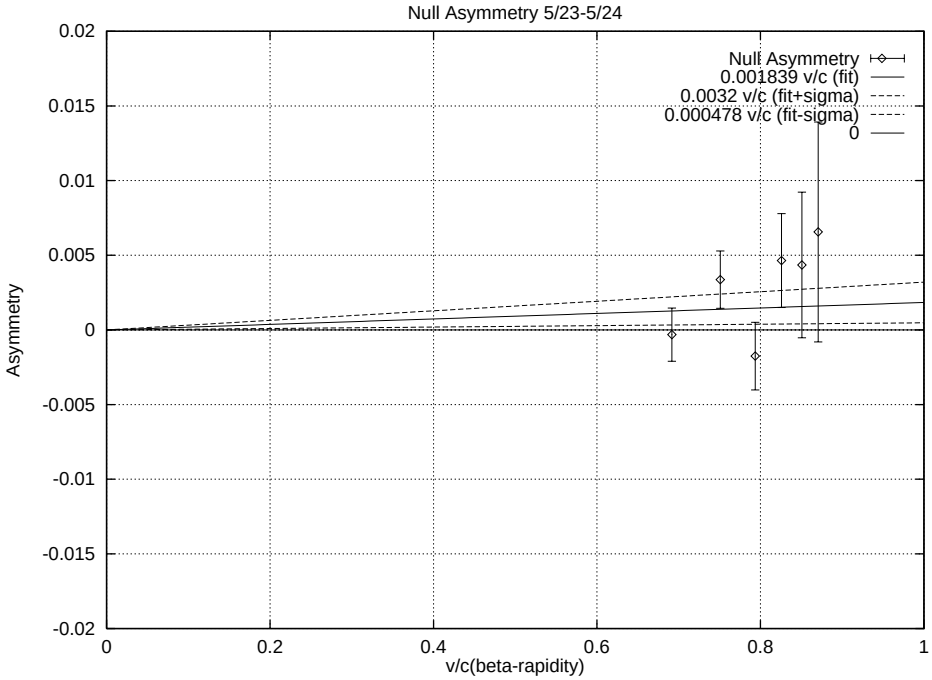


図 3.14: 5/23-5/24 Null Asymmetry

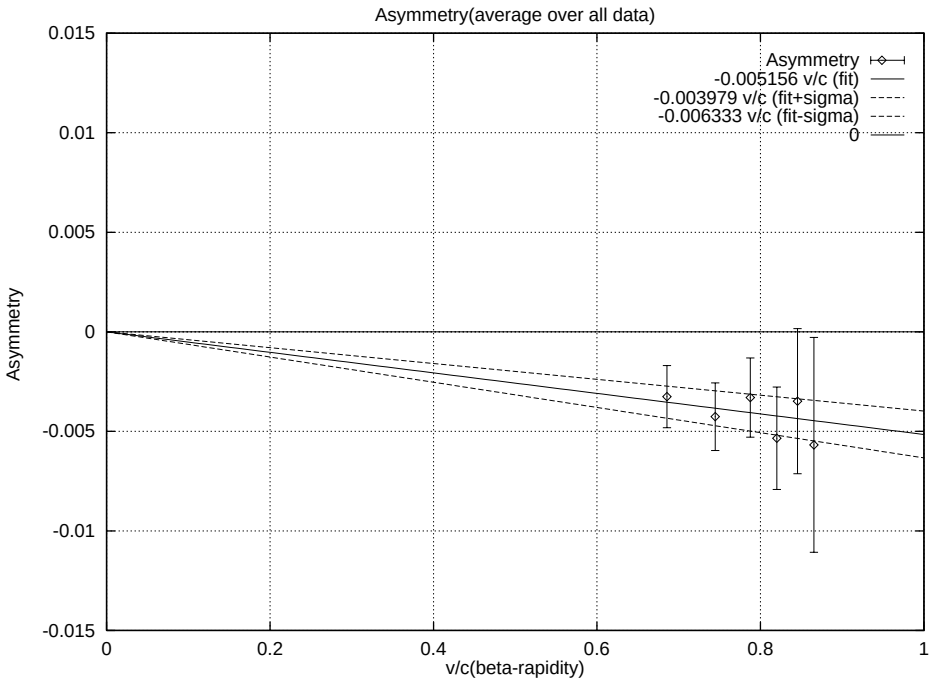


図 3.15: Asymmetry

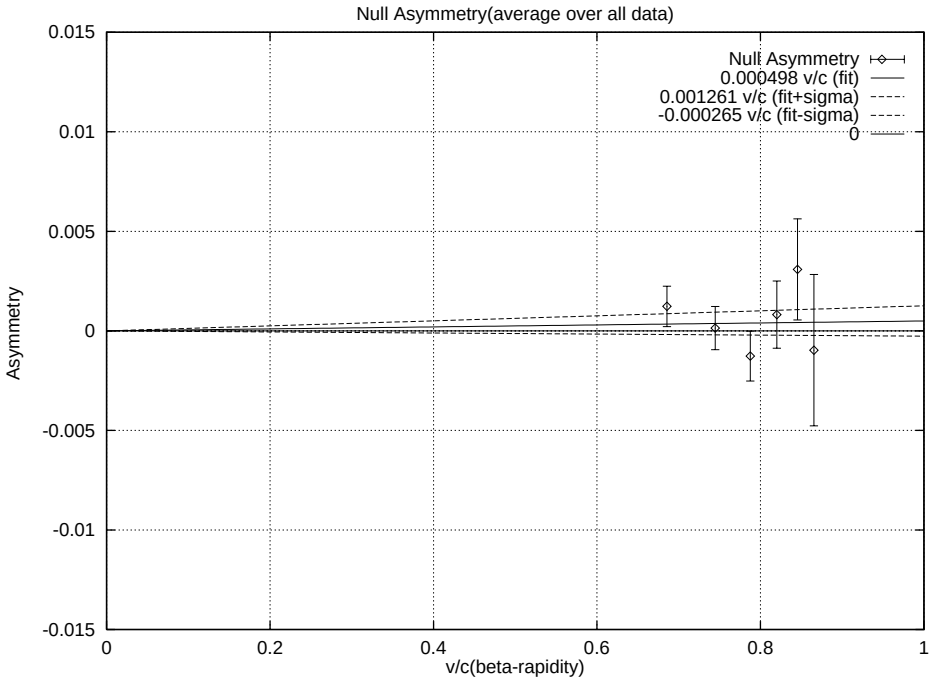


図 3.16: Null Asymmetry

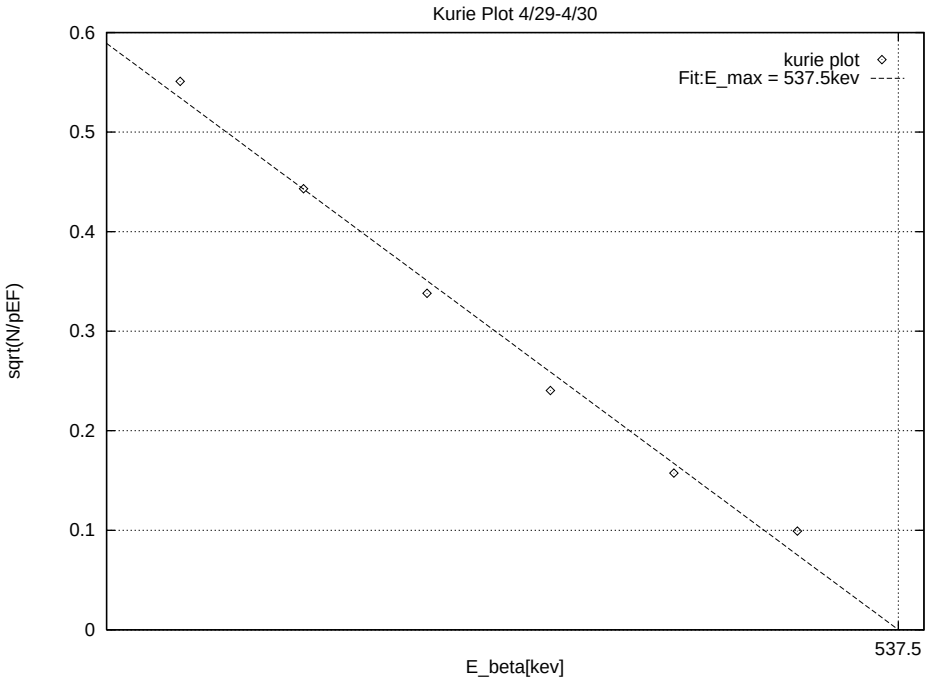


図 3.17: Kurie Plot 4/29-4/30

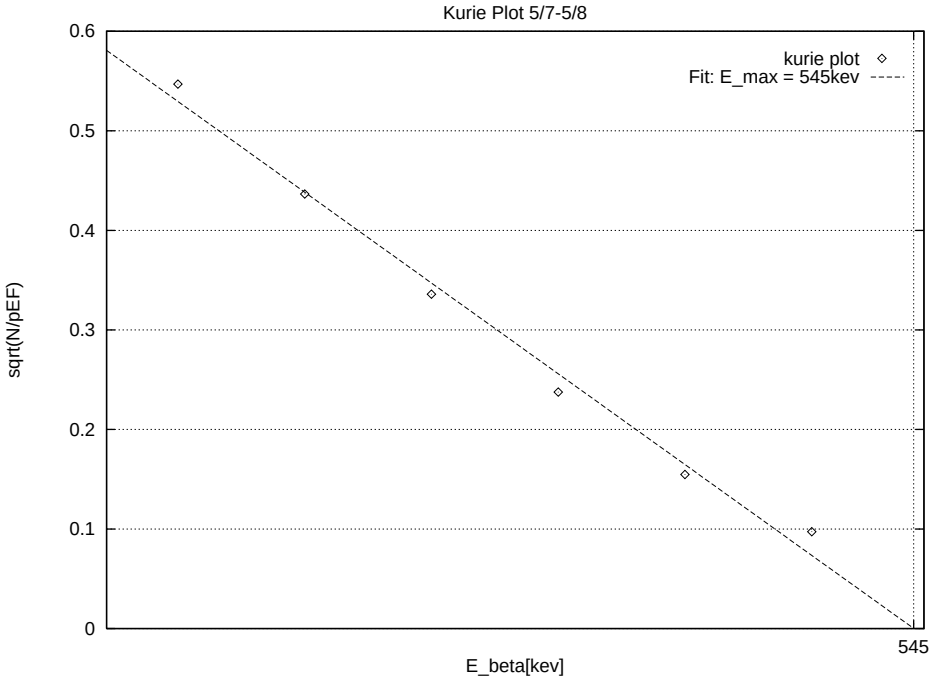


図 3.18: Kurie Plot 5/7-5/8

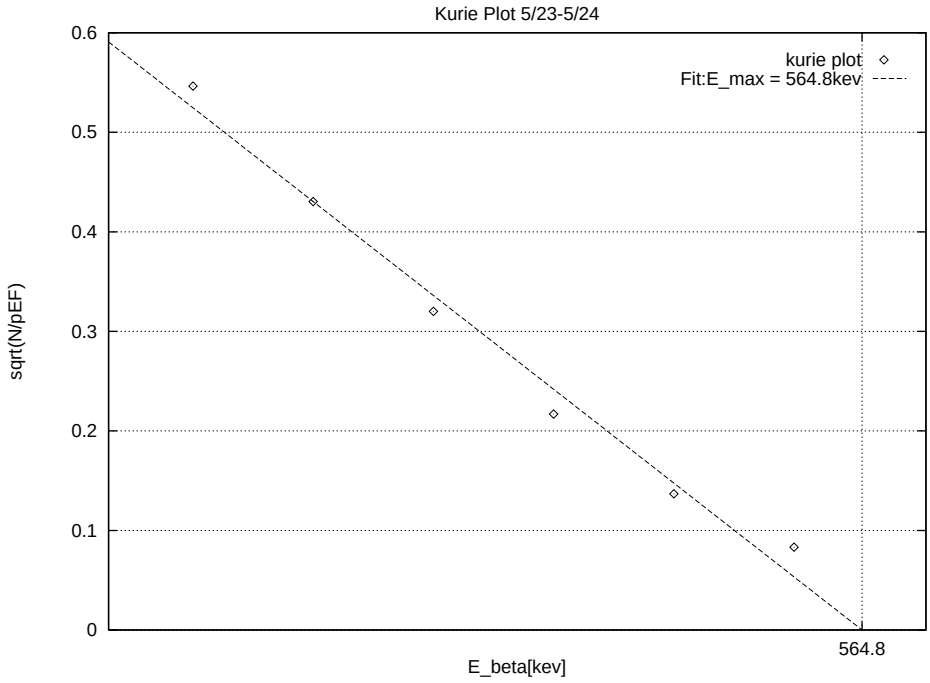


図 3.19: Kurie Plot 5/23-5/24

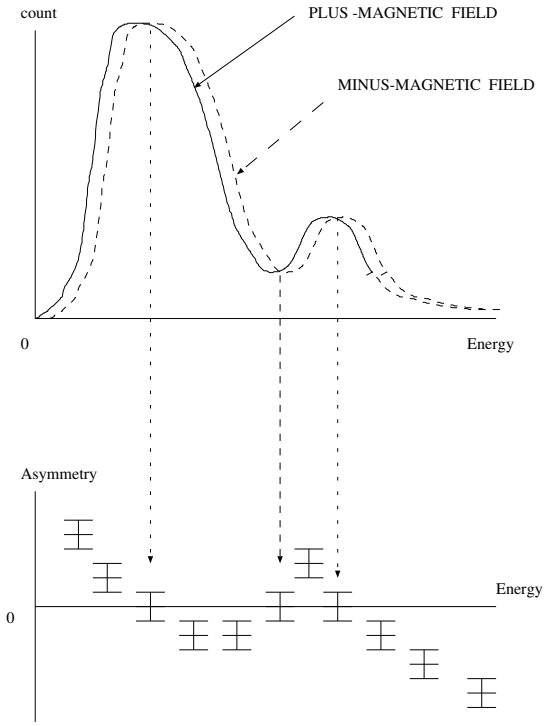


図 3.20: zero-crossing

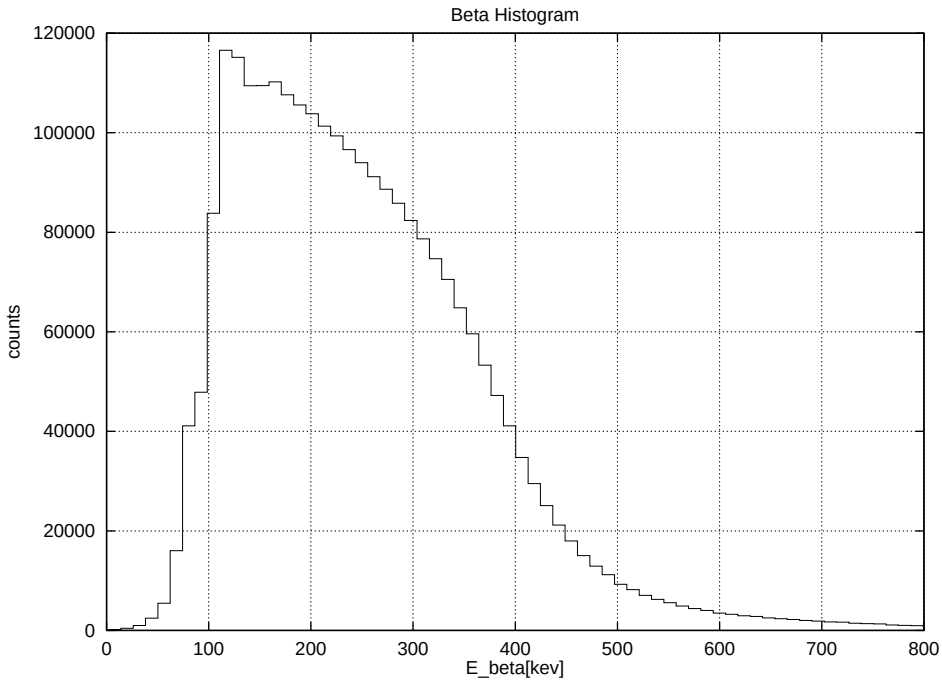


図 3.21: β histogram

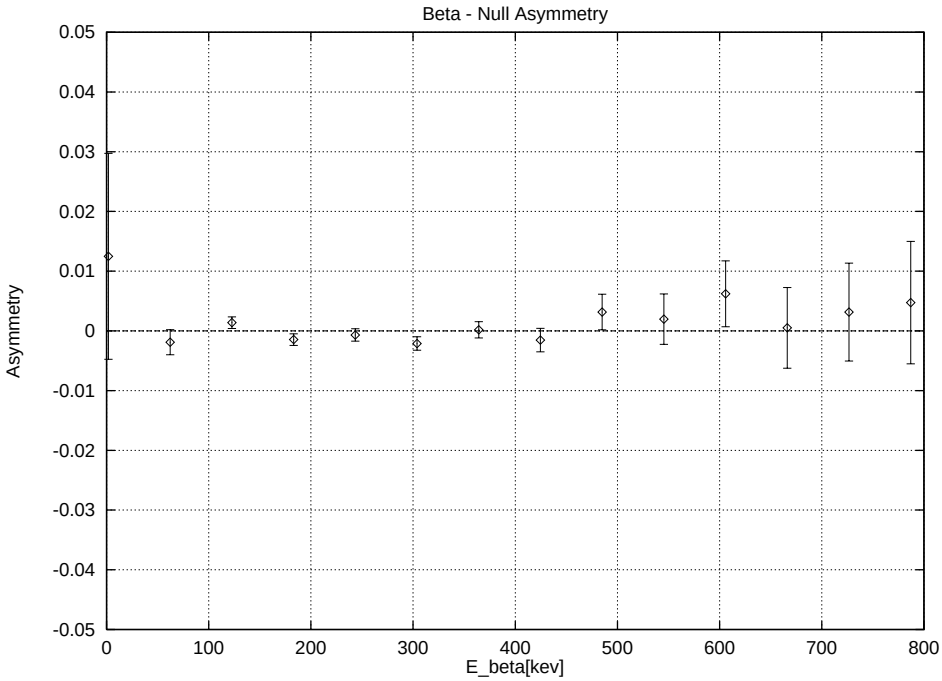


図 3.22: β Null Asymmetry

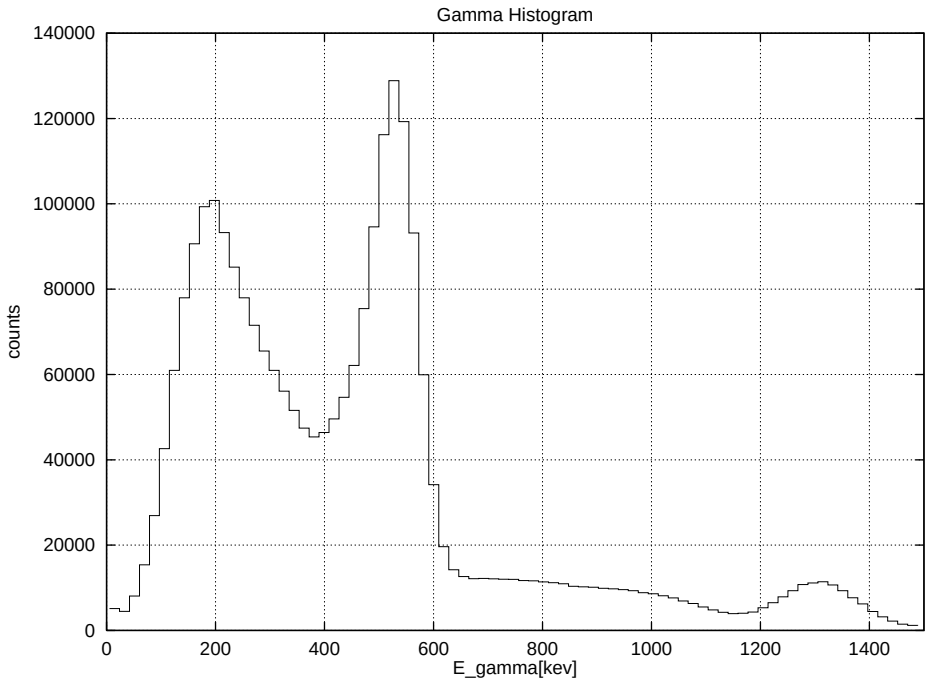


図 3.23: γ histogram

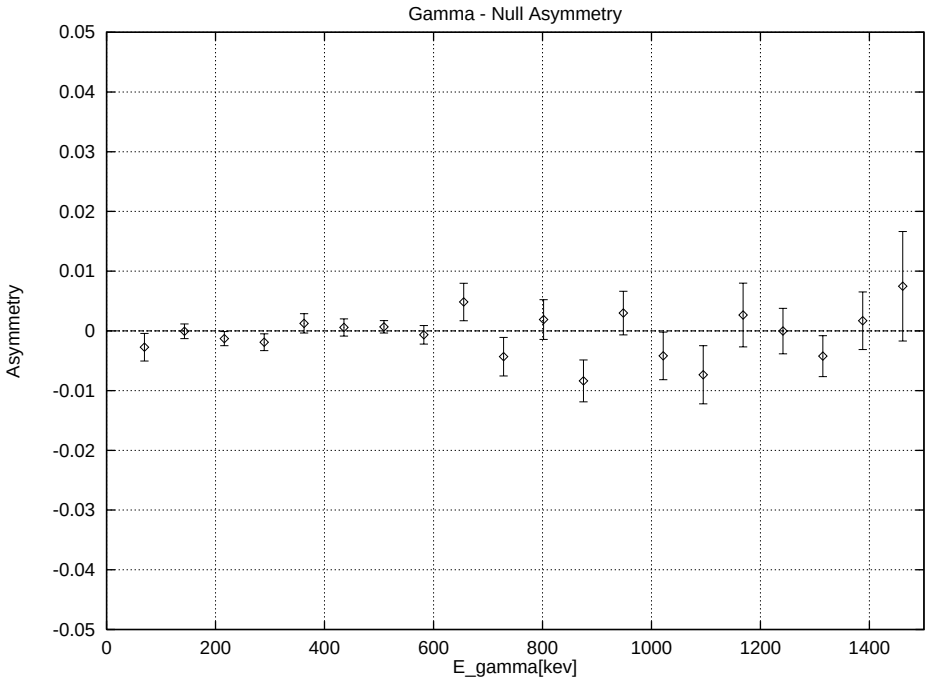


図 3.24: γ Null Asymmetry

第4章　考察と課題

4.1　考察

4.1.1　Parityの破れの検証

Chapter3の解析で得られた最終データを Asymmetry Data、Null Asymmetry Data それぞれについて、0 (つまり、Null) に fit したときの χ^2 検定の結果を Table4.1 に示す。

Asymmetry /Null Asymmetry	ν	χ^2	CL
Asymmetry Data	6	19.738522	0.308223(%)
Null Asymmetry Data	6	4.291148	63.7341(%)

表 4.1: Null に fit したときの χ^2 検定

Table4.1 より、物理的に Null Asymmetry となるべき事象に対して、CL 63.7(%) で Null になるように調整されているとき、(つまり、Asymmetry 測定において原点調整が CL 63.7(%) でなされているいるとき) Asymmetry となるべき事象を Null に fit しようとすると CL 0.31(%) になってしまう。 このことから、本実験において「弱い相互作用における Parity の破れ」は明らかに検出されたということができよう。

更に、

$$\text{理論値}: Asymmetry = -0.00471712 \ \frac{v}{c} \tag{4.1}$$

に対して

$$\text{実験値}: Asymmetry = (-0.005156 \pm 0.001177)\frac{v}{c} \tag{4.2}$$

を得たが、実験値は誤差 1σ 以内に理論値をとらえていることがわかる。最終の実験データを理論値 (4.1) で fit したとき CL は 99.4975(%) となり、fitting の Quality は極めて高いといえる。

この理論値と実験値の良い一致から、「Parity の破れ」を特徴付ける Asymmetry Parameter : A が

$$A = \frac{1}{3}$$

であることも示されたといえよう。

Run number	date	Turn 数	runtime/sleeptime	Asymmetry/Null Asymmetry	χ^2 / ν
Run1'	5/2 ∼ 5/3	550	100sec/20sec	Asym = $(-0.002340 \pm 0.002109)\ \frac{v}{c}$ Null = $(-0.003198 \pm 0.001377)\ \frac{v}{c}$	7.861319/5 1.582740/5
Run2'	5/11 ∼ 5/12	600	100sec/20sec	Asym = $(-0.000472 \pm 0.002103)\ \frac{v}{c}$ Null = $(-0.002063 \pm 0.001302)\ \frac{v}{c}$	5.449679/5 6.210753/5

表 4.2: 棄却した data

4.1.2 棄却した実験データについて

4/29 ∼ 5/29 の期間に行われた Run のうち Null Asymmetry が崩れたものが 2 つ程あった。棄却したこれらの data について Table4.2 に示す。

では、なぜこれらの data は崩れてしまったのか？　残念ながら、これについては明確な原因がつかめていない。ただ、これら崩れた Run の 前後に なぜか PC の I/O error が多発したという事実をあげておこう。DAQ system の異常が、Asymmetry に何らかの作用をしたのではないかと考えられる。例えば、I/O error で DAQ system が止ると磁場の switching も止るのでシリンダーには半日以上にも渡って一定方向の磁場がかけられることになる。コイル電流に対する磁場の反応時間とも関係するが、長時間一定磁場であった影響がどこかに残っている可能性もある。

4.2 課題

4.2.1 前年度から、工夫、改良した点

- Set Up の 安定化について
  本実験においては、まず土台作りをしっかりとやった。set up のすべてを、Al の板の上に乗せ、β 、γ 両 counter をそれぞれ専用の台 (Al 製) に固定した。また、source holder も自作し、source を常に同じ位置に set できるようにした。その結果、各 Run の data taking をほぼ同一条件のもとで行うことができた。

- シリンダーとコイルについて
  シリンダーの素材を鉄よりも磁化率の高い SUY(電磁軟鉄) に した。また、シリンダーのまわりに直接コイルを巻くことで、少ないコイルの巻き数で、シリンダー内に大きい磁場を発生させることができた。ただし、シリンダーで Compton 散乱せずに、コイルで散乱してしまうγ線の影響で、γ-counter に入ってくるγ線の偏極率が約 6 割に低下してしまうという弊害も生まれた。

- Light-Guide と Photo-tube の接着について
  今回は無理を言って、Light-Guide と Photo-tube を接着させて貰ったため、「Set Up が日に日に崩れていくかも知れない」などという余計な心配をせずに済んだ。

- 解析の工夫について

$\beta^+\beta^- \to 2\gamma$ によって発生した 511kev-γ と、β との coincidence の event は $\beta - \gamma$ 相関が無いため、Asymmetry を測ろうとする本来の実験目的からすると、捨て去るべきゴミであった。しかし、物理的に Null Asymmetry になるべき この event を あえて ハード的に cut せずに data の中に入れる方針を取った。後で Asymmetry を解析するときに、soft cut して取り出した この event を 各 Run における Real Time な Null Asymmetry として 採用したのは解析手法上、大きな発見であった。しかしながら厳密なことをいえば、この方法では、 350kev $\sim$ 458kev の γ線に対して Null Asymmetry の調整ができていること示しているだけで、600kev $\sim$ 1079kev の γ線に 対して も 全く同様に、Null Asymmetry の調整ができていると 直接的に 保証するわけではない。ただ、Run の最中に Null Asymmetry を大きく狂わすような (測定における原点をずらすような) アクシデントが無かったということを示す目安にはなると考えられる。

- PC の network 接続について
  data taking に用いた PC を network に接続した結果、ASCII file を BIRD-net にそのまま転送し、work-station 上で解析できるようになった。

4.2.2 更なる反省と課題

- ADC channel の 揺れについて
  実験においては ADC の channel が時間とともにふらつく現象がみられた。電源の揺れを反映しているのかも知れないと思い、配電盤からの電圧を regulator に通してみたり、calibration を頻繁に行うことで対処したが、根本的な解決にはならなかった。原因の究明が必要である。

- pedestal の twin peaks について
  ADC の pedestal が twin peaks になってしまうので、High Pass filter を自作して対処したが、Chapter2 でも述べたように、副作用として、生 pulse が プラス側へ跳ね返ってしまった。この影響で、β線、γ線 の Energy にわずかに誤差が生じた疑いもある。

- β線の Energy Loss について
  source から出た β 線は、source 容器表面の Al 箔、及び、空気中で これらと相互作用することで、約 10kev の Energy を Loss する。解析ではこれらの影響は trivial だと考えて無視した (実際、Kurie Plot の結果はこの影響を無視しても良いということを支持している) が、更なる厳密さを求めるのなら考慮すべきであったと思われる。

- シリンダー内電子の偏極率の測定について
  本実験の set up において、シリンダー内電子が どのくらい偏極しているのかを直接には測定しなかった。ヒステリシス曲線を描くなどの手段を使って、この課題に取り組むべきであったが、時間の関係上そこまで手が回らなかった。また、DAQ system の scheme では、sleep time を 20 sec に設定したが、本当にこの時間で「電子の偏極

方向の反転」が完全に行われているかどうかは定かではない。 run time 、sleep time の組み合わせを色々変えてみて、同様の data を取っていたらどうなっていたか。これは興味深い問題である。

- 系統誤差の無考慮について
  解析では統計誤差は考慮したが、系統誤差に関しては Table3.4 で簡単に触れたものの、最終結果に全く反映されていない。noise についての把握が足らなかったように思う。

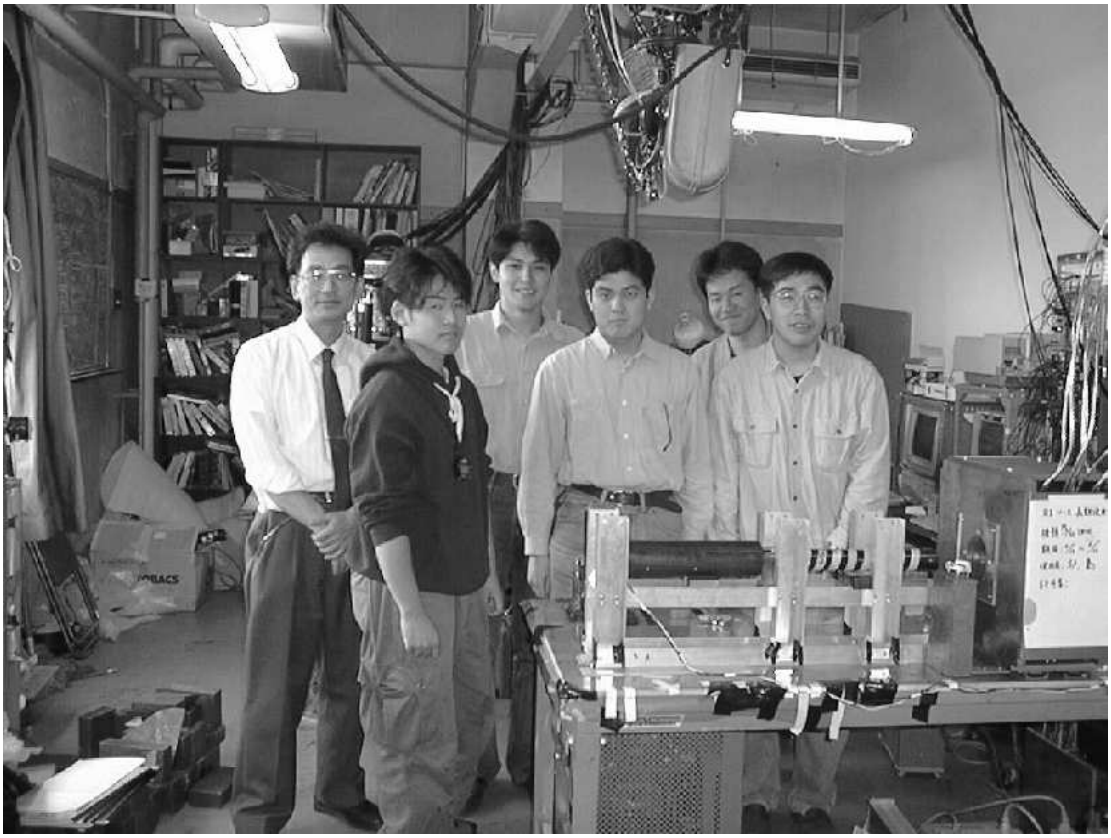
- DAQ system の改良について
  5 月に入ってから、PC が I/O error を多発したのは、ハードディスクが熱暴走したためと思われる。本実験のように数十 MB もの file を幾つも扱う実験を今後とも行うのであれば、ハードディスクを更新した方が良い。また、DAQ system から得られる 生 file は、バイナリ形式であるが、PC と work station ではバイナリ形式の扱いが違うために、「バイナリ形式 –¿ ASCII 形式」の変換を PC 上で行わなければならなかった。非力な PC では、何十 MB もある 1 つの file を変換するのに数十分を要する。変換プログラムの効率を改善するだけでは根本的な解決にならないので出力形式として ASCII 形式も扱えるように思いきって、MICRODATA を書き直すことも必要ではないか。

- source 管理について
  我々は、実験の後半期になると、source の管理に関して 態度がルーズになっていた。反省すべき行為である。「放射線は人体にとって有害なもの」ということを今一度、認識し直す必要がある。

謝辞

95 年度 P2 からこの実験を引き継ぎ、とうとう二年越で念願の「 Parity Violation 」を捕まえる事ができた。P2 の 歴史に新たな 1 ページを刻むことがでができ、我々の熱意と努力が報われたという満足感で一杯である。未熟な我々を叱咤激励し、最後まで適度なアドバイスを与え続けて下さった笹尾さん、畑さん、蔵重さん、そして 95 年度 P2 のみなさんに感謝の意を込めて、

Special Thanks To “Plenty Of Guts”!



付 録A　Parity Conservation

量子力学における parity 演算子を $\hat{P}$ とする。量子力学的系の状態を表す波動関数 $\psi(\vec{r},t)$ は、parity 変換により、

$$\hat{P}\psi(\vec{r},t) = \psi(-\vec{r},t)$$

となる。parity 変換を 2 回繰り返せば、

$$\hat{P}\hat{P}\psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r},t)$$

ともとの状態に戻るので、parity 演算子 $\hat{P}$ の固有値は、$+1$ または -1 である。$+1$(-1) に対応する状態波動関数を、正 (負) の parity 状態と呼ぶ。

また座標 $\vec{r}$ 、運動量 $\vec{p}$ 、角運動量 $\vec{J}$は、parity 変換に対して、

$$\vec{r} \to -\vec{r}$$

$$\vec{p} \to -\vec{p}$$

$$\vec{J} \to \vec{J}$$

のように変換する。

さらに、軌道角運動量の parity 変換は、球面調和関数 $Y_l^m(\theta,\phi)$ で考えると、

$$\hat{P}Y_l^m(\theta,\phi) = Y_l^m(\pi-\theta,\pi+\phi) = (-)^l Y_l^m(\theta,\phi)$$

と変換する。したがって、N 個多粒子系の parity は、粒子間軌道角運動量を $l_1, l_2, \cdots, l_{N-1}$ とし、各粒子の固有 parity を P_1、P_2、$\cdots$、P_Nとすると、

$$P \;=\; (-)^{l_1+l_2+\cdots+l_{N-1}} P_1 P_2 \cdots P_N$$

と表される。

さて、ある系が parity を保存するとは、相互作用の前と後で、系の parity 状態が不変であると言うことであり、

$$[\hat{P},\hat{H}] = 0$$

と等価である。つまり、Heisenberg 方程式の観点からして明らかである。

($\hat{H}$は、Hamiltonian)

付 録B　$\tau - \theta$ puzzle

$\tau - \theta$ puzzle は 1950 年代始め、中間子の崩壊過程の研究のなかで、見つかった paradoxical な事実である。(現在では、K -meson と呼ばれる 1 個の粒子の崩壊過程)

当時θ -meson と呼ばれた粒子は、electron の約 1000 倍の質量を持ち、2 個のπ -meson に崩壊した。一方、同程度の質量を持つτ -meson と呼ばれる粒子も存在し、その粒子は、3 個のπ -meson に崩壊した。

$$\theta^{\pm} \longrightarrow \pi^{\pm} + \pi^{0}$$

$$\tau^{\pm} \longrightarrow \pi^{\pm} + \pi^{+} + \pi^{-}$$

Parity-conservation により、θ -meson およびτ -meson の parity は、崩壊後のπ -meson 系の parity で決まるはずである。1 個のπ -meson は、$(S^P = 0^-)$ の Spin,Parity をもつ。よって、θ -meson は $(S^P = 0^+)$ であり、τ -meson は Dalitz-plots より $(S^P = 0^-)$ である。またこれらの粒子の平均寿命τと質量 M は、

$$M(\tau^+) = 966 M_e$$

$$M(\theta^+) = 968 M_e$$

$$\tau(\tau^+) = 1.19 \times 10^{-8} sec$$

$$\tau(\theta^+) = 1.21 \times 10^{-8} sec$$

ただし $M_e = (electron's\ mass) = 511 kev$

であり、誤差まで含めれば、ほとんど一致している。

したがって、Parity-conservation が正しいならば、τ -meson とθ -meson は、異なる粒子と認識される。しかし、寿命と質量の一致は、同一粒子とも考えられるところから、$\tau - \theta$ puzzle という問題になったのである。

1956 年、Lee と Yang はこの問題を解決するために、Weak-interaction により素粒子が崩壊する場合、Parity は保存しないと示唆したのである。

付 録C　$\beta-\gamma$ correlation

C.1　Density matrix for β-decay

ここでは、β^- radiation の場合を考える。β^+ radiation の場合は後で補足する。まず、γ -matrix を次のように定義する。

$$\gamma_i = -i\beta\alpha_i \ ;\gamma_4 = -\beta \ ;\sigma_i = \gamma_5\alpha_i \ ;\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \ ;i = 1,2,3. \tag{C.1}$$

次にβ-decay 相互作用 Hamiltonian を、V-A 相互作用を考慮して次のように導入する。

$$\begin{aligned} H_\beta &= C_V(\psi_p^*\gamma_4\gamma_\mu\tau^-\psi_n)[\psi_e^*\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_\nu] \\ &\quad -C_A(\psi_p^*\gamma_4\gamma_\mu\tau^-\gamma_5\psi_n)[\psi_e^*\gamma_4\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_\nu] + herm.conj \\ &= -[\psi_p^*(C_V - C_A\gamma_5)\vec{\alpha}\tau^-\psi_\nu][\psi_e^*\vec{\alpha}(1+\gamma_5)\psi_\nu] \\ &\quad +[\psi_p^*(C_V - C_A\gamma_5)\tau^-\psi_n][\psi_e^*(1+\gamma_5)\psi_\nu] + herm.conj. \end{aligned} \tag{C.2}$$

ここで、τ^-は Isospin 演算子で、neutron を proton に変換する。相互作用は、空間の一点で起こると考えると、(Universal Fermi interaction)

$$\begin{aligned} H_\beta &= -\int dr_N dr_L[\psi_p^*(C_V - C_A\gamma_5)\vec{\alpha}\tau^-\psi_\nu]_{\vec{r}_N}[\psi_e^*\vec{\alpha}(1+\gamma_5)\psi_\nu]_{\vec{r}_L}\delta(\vec{r}_N - \vec{r}_L) \\ &\quad +\int dr_N dr_L[\psi_p^*(C_V - C_A\gamma_5)\tau^-\psi_n]_{\vec{r}_N}[\psi_e^*(1+\gamma_5)\psi_\nu]_{\vec{r}_L}\delta(\vec{r}_N - \vec{r}_L) \end{aligned} \tag{C.3}$$

となる。

また次の公式がある。

$$\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = (r_1 r_2)^{-1}\delta(r_1 - r_2)\sum_{L,M}(-)^{L+M} i^L Y_L^M(\hat{r}_1) i^L Y_L^{-M}(\hat{r}_2) \tag{C.4}$$

さらに、既約 tensor 演算子を次のように定義する。

$$\begin{aligned} T_{KL1}^M &= \sum_v c(1,L,K;M-v,v)\gamma_5\sigma^{M-v} i^L Y_L^v \\ T_{KL0}^M &= \sum_v c(0,L,K;M-v,v) i^L Y_L^v \end{aligned} \tag{C.5}$$

前出の (C.4)、(C.5) 式を、(C.3) に代入して、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} H_\beta &= \sum_{KL\gamma\mu}(-)^{K+\mu}\int_0^\infty r^2 dr \\ &\quad \cdot\left\{\int d\Omega_N[\psi_p^*(C_V - C_A\gamma_5)T_{KL\gamma}^\mu\tau^-\psi_n]\right\}_{r_N=r} \\ &\quad \cdot\left\{\int d\Omega_L[\psi_e^*(1+\gamma_5)T_{KL\gamma}^{-\mu}\tau^-\psi_\nu]\right\}_{r_L=r} \end{aligned} \tag{C.6}$$

ただし、$\gamma = 0, 1$ の値しかとりえない。また、K,L は非負整数であり、μの値は$-K \leq \mu \leq K$ に制限される。

Coulomb 場内を運動する Dirac 粒子 (electron) の波動関数ψ_eおよび自由運動する Dirac 粒子 (neutrino) の波動関数ψ_νは、

$$\begin{aligned} \psi_e^{(\pm)m_e} &= \sum_{\chi\neq 0} 4\pi[2l(\chi)+1]^{1/2} c[l(\chi)\ 1/2\ j(\chi);0\ m_e] e^{\pm i\Delta_\chi} \psi_\chi^{m_e} \\ \psi_\nu^{m_\nu} &= \sum_{\chi\neq 0} 4\pi[2l(\chi)+1]^{1/2} c[l(\chi)\ 1/2\ j(\chi);0\ m_e] \psi_\chi^{m_\nu} \end{aligned} \tag{C.7}$$

となる。ここで、$\psi_\chi^{m_e}$は、(C.36) 式で、定義される。また、$\psi_\chi^{m_\nu}$は、$Z \to 0$ の解であるので、次の式で与えられる。

$$\psi_\chi^{m_\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}[j_{l(\chi)}(qr) + Sg\chi_\nu\ i(\vec{\alpha}\cdot\hat{r})\ j_{l(-\chi)}(qr)]\phi_\chi^{m_\nu} \tag{C.8}$$

ただし、$j_l(qr)$ は球 Bessel 関数である。

(C.7) 式は、粒子の伝搬方向に量子化軸を選んでいる。よって、ある一般的な座標系を選んだならば、(C.7) 式は次のようになる。

$$\psi_e^{(\pm)m_e} = \sum_{\chi\neq 0}\sum_v D_j(\chi)^{vm_e} 4\pi[2l(\chi)+1]^{1/2} c[l(\chi)\ 1/2\ j(\chi);0\ m_e] e^{\pm i\Delta_\chi} \psi_\chi^v \tag{C.9}$$

ただし、$D_j(\chi)^{vm_e}$は、回転行列である。

次に、Wigner-Eckart の定理は、

$$< jm|O_\Lambda^\mu|j'm' >= (-)^{j-m} \begin{pmatrix} j & \Lambda & j' \\ -m & \mu & m' \end{pmatrix} < j||O_\Lambda||j' > \tag{C.10}$$

である。ただし

$$\begin{pmatrix} j & \Lambda & j' \\ -m & \mu & m' \end{pmatrix}$$

は、Wigner 3-j 係数である。

最終的に H_βは次の形になる。

$$\begin{aligned} H_\beta &= \sum_{KL\gamma\mu} (-)^{K+\mu} \sum_{\chi_e,\chi_\nu\neq 0} \sum_{v_e,v_\nu} D_j(\chi_e)^{*v_e m_e}(\theta_e) D_j(\chi_\nu)^{v_\nu m_\nu}(\theta_\nu) \\ &\quad \cdot 4\pi\cdot[2l(\chi_e)+1][2l(\chi_\nu)+1]^{1/2} \\ &\quad \cdot c[l(\chi_e)\ 1/2\ j(\chi_e);0\ m_e] c[l(\chi_\nu)\ 1/2\ j(\chi_\nu);0\ m_\nu] \\ &\quad \cdot (-)^{J_f - m_p} (-)^{j(\chi_e)-v_e} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} J_f & K & J_i \\ -m_p & \mu & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j(\chi_e) & K & j(\chi_\nu) \\ -v_e & -\mu & v_\nu \end{pmatrix} exp(i\Delta_{\chi_e}) \\ &\quad \cdot \int_0^\infty r^2 dr < J_f||(C_V - C_A\gamma_5) T_{KL\gamma}\tau^-||J_i >_{r_N=r} \\ &\quad \times < j(\chi_e)||(1+\gamma_5) T_{KL\gamma}||j(\chi_\nu) >_{r_L=r} \end{aligned} \tag{C.11}$$

また、既約行列要素を次のように表示する。

$$C_{KL\gamma}[J_i,J_f;j(\chi_e),j(\chi_\nu)] = \int_0^\infty r^2dr < J_f||(C_V-C_A\gamma_5)T_{KL\gamma}\tau^-||J_i >_{r_N=r} \times < j(\chi_e)||(1+\gamma_5)T_{KL\gamma}||j(\chi_\nu) >_{r_L=r} \quad \text{(C.12)}$$

密度行列は、H_βとそれの complex conjugate H^*_β 積である。neutrino は観測しないので、neutrino の立体角を積分し、磁気量子数の sum を取ると、

$$\begin{aligned}
&\rho(m_pm'_p;m_nm'_n;m_em'_e)\\
&= (4\pi)^3\sum_{KK'LL'\gamma\gamma'\chi_e\chi'_e\chi_\nu J}(-)^{J+j(\chi_\nu)-j(\chi_e)-j(\chi'_e)}\\
&\cdot(-)^{m_p-m_n-m_e}[2l(\chi_e)+1][2l(\chi'_e)+1]^{1/2}\\
&\cdot c[l(\chi_e)\ 1/2\ j(\chi_e);0\ m_e]c[l(\chi'_e)\ 1/2\ j(\chi'_e);0\ m'_e]\\
&\cdot c[j(\chi_e)\ j(\chi'_e)\ J;-m_e,m'_e](2J_i+1)^{1/2}\\
&\cdot c[J_f\ K\ J_i;-m_p,m_p-m_n]c[J_f\ K'\ J_i;-m'_p,m'_p-m'_n]\\
&\cdot c[K\ K'\ J;m_p-m_n,-m'_p+m'_n]\\
&\cdot W[j(\chi_e)Kj(\chi'_e)K';j(\chi_\nu)J]D_J^{m_p-m'_p-m_n+m'_n,m'_e-m_e}\\
&\cdot C_{KL\gamma}[J_i,J_f;j(\chi_e),j(\chi_\nu)]C^*_{K'L'\gamma'}[J_i,J_f;j(\chi'_e),j(\chi_\nu)]\\
&exp[+i(\Delta_{\chi_e}-\Delta_{\chi'_e})]
\end{aligned} \quad \text{(C.13)}$$

さらに角運動量の合成を考えて、次のように変形すると、粒子の性質の factor と、幾何学的性質の factor に密度行列は分解される。まず particle parameter B_Jを定義する。

$$\begin{aligned}
&B_J^{u,t}(K,K';J_f,J_i)\\
&= 4\pi^2\frac{2u+1}{2J_i+1}\frac{[2(2t+1)]^{1/2}}{[(2K+1)(2K'+1)(2J+1)]^{1/2}}\\
&\cdot\begin{pmatrix}K&K'&J\\1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}\sum_{LL'\gamma\gamma'\chi_e\chi'_e\chi_\nu}(-)^{j(\chi_\nu)+j(\chi_e)+l'_e-1}\\
&\cdot[2l(\chi_e)+1][2l(\chi'_e)+1][2j(\chi_e)+1][2j(\chi'_e)+1]^{1/2}\\
&\cdot\begin{pmatrix}l(\chi_e)&l(\chi'_e)&u\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}K&K'&J\\j(\chi'_e)&j(\chi_e)&j(\chi_\nu)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}l(\chi_e)&l(\chi'_e)&u\\1/2&1/2&t\\j(\chi_e)&j(\chi'_e)&J\end{Bmatrix}\\
&\cdot exp[+i(\Delta_{\chi_e}-\Delta_{\chi'_e})]\\
&\cdot C_{KL\gamma}[J_i,J_f;j(\chi_e),j(\chi_\nu)]C^*_{K'L'\gamma'}[J_i,J_f;j(\chi'_e),j(\chi_\nu)]
\end{aligned} \quad \text{(C.14)}$$

さらに、geometric factor F_J を定義する。

$$
\begin{aligned}
& F_J^{u,t}(K,K';J_f,J_i) \\
&= [(2J_i+1)(2J_f+1)(2J+1)(2K+1)(2K'+1)(2u+1)(2t+1)]^{1/2} \\
&\quad \cdot(-)^{-K-J-1}\begin{pmatrix} K & K' & J \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} J_i & J_f & K \\ t & u & J \\ J_i & J_f & K' \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{C.15}
$$

したがって、密度行列はつぎのように書ける。

$$
\begin{aligned}
& \rho(m_p m_p';m_n m_n';m_e m_e') \\
&= 16\pi \sum_{uu'tt'KK'J}\left[\frac{2J_i+1}{2(2J_f+1)}\right]^{1/2}(-)^{K+K'+J_i+1/2+m_p'-m_n-m_e+t+u'-J-J_f} \\
&\quad \cdot c[t,u,J;m_n-m_n',m_p'-m_p]c[J_f,J_f,u;m_p,-m_p']c[J_i,J_i,t;m_n,-m_n'] \\
&\quad \cdot c[t',u',J;m_e'-m_e,0]c[1/2,1/2,t';m_e,-m_e'] \\
&\quad \cdot F_J^{u,t}(K,K';J_f,J_i)B_J^{u',t'}(K,K';J_f,J_i)D_J^{m_p-m_p'-m_n+m_n',m_e'-m_e}
\end{aligned} \tag{C.16}
$$

particle parameter B_J について説明を加える。相互作用は Rank K の既約テンソル $T_{KL\gamma}$ によって特徴づけられる。既約テンソル $T_{KL\gamma}$を核行列要素の operator として考えると、K ,K' の値には、selection rule があり、

$$
|\ J_f\ -\ J_i\ | \leq\ K,K'\ \leq\ J_f\ +\ J_i \tag{C.17}
$$

一方、既約テンソル $T_{KL\gamma}$を lepton 行列要素の operator として考えることもでき、K ,K' の値には、selection rule があり、

$$
\begin{aligned}
|\ j(\chi_e)\ -\ j(\chi_\nu)\ | &\leq\ K\ \leq\ j(\chi_e)\ +\ j(\chi_\nu) \\
|\ j(\chi_e')\ -\ j(\chi_\nu)\ | &\leq\ K'\ \leq\ j(\chi_e')\ +\ j(\chi_\nu)
\end{aligned} \tag{C.18}
$$

また B_Jを特徴づけている J の値にも selection rule があり、

$$
\begin{aligned}
|\ j(\chi_e)\ -\ j(\chi_e')\ | &\leq\ J\ \leq\ j(\chi_e)\ +\ j(\chi_e') \\
|\ K\ -\ K'\ | &\leq\ J\ \leq\ K\ +\ K'
\end{aligned} \tag{C.19}
$$

さらに u,t の値について一言。$B_J^{u,t}$の u,t については、electron の spin を測定しないならば、$t=0,u=J$ である。$F_J^{u,t}$の u,t については、偏極していない核ならば、$t=0$ である。

さらに、lepton 部分の既約行列要素 (座標 r-depend) は、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
& (4\pi)^{1/2}\cdot\langle j(\chi_e)||(1+\gamma_5)T_{KL\gamma}||j(\chi_\nu)\rangle \\
&= f_{\chi_e}^* j_l(\chi_\nu)G_{KL\gamma}(\chi_e,\chi_\nu) + Sg\chi_e g_{\chi_e}^* j_l(\chi_\nu)G_{KL\gamma}(-\chi_e,\chi_\nu) \\
&\quad + f_{\chi_e}^* j_l(-\chi_\nu)G_{KL\gamma}(\chi_e,-\chi_\nu) + Sg\chi_e g_{\chi_e}^* j_l(-\chi_\nu)G_{KL\gamma}(-\chi_e,-\chi_\nu)
\end{aligned} \tag{C.20}
$$

ただし、$G_{KL\gamma}$ は、

$$
\begin{aligned}
& G_{KL\gamma}(\chi_e, \chi_\nu) \\
&= (2\gamma+1)(2K+1)[2l(\chi_e)+1][2l(\chi_\nu)+1][2j(\chi_e)+1][2j(\chi_\nu)+1]^{1/2} \\
&\quad \cdot i^{l(\chi_\nu)+L-l(\chi_e)} c[l(\chi_e), l(\chi_\nu), L; 0, 0] \\
&\quad \cdot (-)^{j(\chi_\nu)-j(\chi_e)+l(\chi_e)} \left\{ \begin{array}{ccc} K & \gamma & L \\ j(\chi_e) & 1/2 & l(\chi_e) \\ j(\chi_\nu) & 1/2 & l(\chi_\nu) \end{array} \right\}
\end{aligned}
\tag{C.21}
$$

である。

一方、核 Spin が $J_f \rightarrow J_{ff}$ に遷移する γ -radiation の密度行列は、

$$
\begin{aligned}
& \rho_\gamma(m_p m_p' \tau) \\
&= \sum_{k\lambda\lambda'} (2k+1)^{1/2} \tau^k (-)^{J_f+m_p} F_k^{0,k}(\lambda, \lambda'; J_{ff}, J_f) \\
&\quad \cdot (2J_f+1)^{-1/2} \left(\begin{array}{ccc} J_f & J_f & k \\ -m_p & m_p' & m_p - m_p' \end{array} \right) \\
&\quad \cdot \delta_\lambda \delta_{\lambda'} D_k^{*m_p - m_p', 0}(\theta_\gamma)
\end{aligned}
\tag{C.22}
$$

C.2 The $\beta - \gamma$ angular correlation function

$$W(\theta_{e\gamma}) = \frac{1}{2J_i+1} \sum_{m_p m'_p m_n m'_n m_e m'_e \tau} \delta_{m_e m'_e} \delta_{m_n m'_n} \cdot\rho(m_p, m'_p; m_n m'_n; m_e m'_e) \rho_\gamma(m_p, m'_p; \tau) \tag{C.23}$$

$$W(\theta_{e\gamma}) = \frac{32\pi}{2J_f+1} \sum_{KK'LL'\ J_{even}} \delta_\lambda \delta_{\lambda'} (-)^{K+K'+J} P_J(\theta_{e\gamma}) \cdot B_J^{J,0}(K, K'; J_f, J_i) F_J^{J,0}(K, K'; J_f, J_i) F_J^{0,J}(\lambda, \lambda'; J_{ff}, J_f) \tag{C.24}$$

The β circularly polarized γ-angular corelation function

$$P_{circ}(\theta_{e\gamma}) = \frac{1}{W(\theta_{e\gamma})(2J_i+1)} \sum_{m_p m'_p m_n m'_n m_e m'_e \tau} \tau \delta_{m_e m'_e} \delta_{m_n m'_n} \cdot\rho(m_p, m'_p; m_n m'_n; m_e m'_e) \rho_\gamma(m_p, m'_p; \tau) \tag{C.25}$$

$$P_{circ}(\theta_{e\gamma}) = \frac{1}{W(\theta_{e\gamma})} \frac{32\pi}{2J_f+1} \sum_{KK'LL'\ J_{odd}} \delta_\lambda \delta_{\lambda'} (-)^{K+K'+J} P_J(\theta_{e\gamma}) \cdot B_J^{J,0}(K, K'; J_f, J_i) F_J^{J,0}(K, K'; J_f, J_i) F_J^{0,J}(\lambda, \lambda'; J_{ff}, J_f) \tag{C.26}$$

我々の導出したい pseudoscalar 量は、式 (C.25)(C.26) により、導かれる。

C.3 Spin Eigenfunction

次のように演算子を定義する。

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p}, \\ \vec{p} &= (1/i)\vec{\nabla}, \\ \chi_{op} &= \beta(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1)\end{aligned} \tag{C.27}$$

ただし、$\beta^2 = 1$、$\sigma^2 = 3$、$[\beta, \vec{\sigma}] = 0$ である。すると、χ_{op}は $(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})$ と交換するので、任意の中心力 Potential の Dirac Hamiltonian に対しても交換する。

さらに、$\chi_{op}^2 = j_{op}^2 + 1/4$ であるので、χ_{op}の固有値は、$\chi = \pm 1, \pm 2, \cdots,$ となる。(中心力 Potential に対して j_{op}は保存される量子数であるので j^2の固有値 $= j(j+1) =$ (任意の半整数) を取る。)

これから我々は次の関係を満たす波動関数を導きたい。

$$\begin{aligned}\chi_{op}\phi_\chi^\mu &= +\chi\phi_\chi^\mu, \\ j_z\phi_\chi^\mu &= \mu\phi_\chi^\mu\end{aligned} \tag{C.28}$$

まず波動関数ϕを次のように分解する。

$$\begin{aligned}\phi_\chi^{(I)\mu} &= \frac{1}{2}(1-\beta)\phi_\chi^\mu \\ \phi_\chi^{(II)\mu} &= \frac{1}{2}(1+\beta)\phi_\chi^\mu\end{aligned} \tag{C.29}$$

ただしβは、

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、$(1 \mp \beta)$ は波動関数の上 (下) 成分を取り出す。また $(1-\beta)\cdot(1+\beta) = 0$ である。すると、

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1)\phi_\chi^{(I)\mu} &= -\chi\phi_\chi^{(I)\mu}; \quad (1+\beta)\phi_\chi^{(I)\mu} = 0 \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1)\phi_\chi^{(II)\mu} &= \chi\phi_\chi^{(II)\mu}; \quad (1-\beta)\phi_\chi^{(II)\mu} = 0\end{aligned} \tag{C.30}$$

$[(\vec{\alpha} \cdot \hat{r}), \chi_{op}] = 0$ より

$$\phi_\chi^{(II)\mu} = +i(\vec{\alpha} \cdot \hat{r})\phi_\chi^{(I)\mu} \tag{C.31}$$

が、(C.30) を満たす。

ここから、$\mu = \pm 1/2$ の場合 $(\chi = l \ or \ \chi = -l-1$ の時) についてのみ考えると (C.30) は、

$$\phi_\chi^{(I)\mu} = \frac{1}{2}(1-\beta)(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} - \chi)Y_l^0(\hat{r})X_{1/2}^\mu \tag{C.32}$$

を解に持つ。ただし、$X_{1/2}^\mu$ は次で定義される。

$$\begin{aligned}\sigma_z X_{1/2}^\mu &= 2\mu X_{1/2}^\mu \\ \sigma^2 X_{1/2}^\mu &= 3X_{1/2}^\mu\end{aligned} \tag{C.33}$$

さらに、$\phi_\chi^{(I)\mu}$を規格化して、

$$\phi_\chi^{(I)\mu} = (-Sg\chi)^{\mu-1/2}\frac{1}{2}(1-\beta)\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{L}-\chi}{[|x|(2l+1)]^{1/2}}\ i^l Y_l^0(\hat{r})X_{1/2}^\mu \tag{C.34}$$

となる。これはまた次の式と同等である。

$$\phi_\chi^{(I)\mu} = \frac{1}{2}(1-\beta)\sum_\tau c(l,1/2,j;\tau,\mu-\tau)\ i^l Y_l^0(\hat{r})X_{1/2}^\mu \tag{C.35}$$

したがって中心力 Potential 中の Dirac 粒子の任意の波動関数は、

$$\psi_\chi^\mu \ = \ (f_\chi + ig_\chi(\vec{\alpha}\cdot\hat{r}))\ \phi_\chi^{(I)\mu} \tag{C.36}$$

と表される。

C.4 Radial wave function

これからDirac Equationを用いてRadial wave functionを導出する。中心力Potential$V(r)$に対してDirac Equationは次のようになる。

$$[(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})+\beta+E-V(r)]\psi_\chi^\mu=0 \tag{C.37}$$

ψ_χ^μは、χ_{op}の固有関数より、(C.36)で与えられる。したがって、f_χ^μとg_χ^μを求めることになる。
まず次の公式

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})=(1/ir)[(\vec{\sigma}\cdot\vec{L})+2+i(\vec{r}\cdot\vec{p})](\vec{\alpha}\cdot\hat{r}) \tag{C.38}$$

を用いて、Dirac Equationを書き換える。

$$\begin{aligned}
&((1/ir)[(\vec{\sigma}\cdot\vec{L})+2+i(\vec{r}\cdot\vec{p})]ig_\chi(r)\\
&\qquad+[\beta+E-V(r)]f_\chi(r)\\
&+\{(1/ir)[(\vec{\sigma}\cdot\vec{L})+2+i(\vec{r}\cdot\vec{p})]f_\chi(r)\\
&+i[\beta+E-V(r)]g_\chi(r)\}(\vec{\alpha}\cdot\hat{r}))\phi_\chi^{(I)\mu} &= 0
\end{aligned} \tag{C.39}$$

(C.39)に$\frac{1}{2}(1+\beta)$と$\frac{1}{2}(1-\beta)$を掛けることで、次の式が導出される。

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dr}-\left(\frac{\chi-1}{r}\right)\right)g_\chi(r)+(E-V(r)-1)f_\chi(r)=0\\
\left(-\frac{d}{dr}-\left(\frac{\chi+1}{r}\right)\right)f_\chi(r)+(E-V(r)+1)g_\chi(r)=0
\end{aligned} \tag{C.40}$$

特にCoulomb場のときの解は、

$$\begin{aligned}
f_\chi &= [(W+1)/2W]^{1/2}(kr)^{\gamma-1}C(\gamma,\eta)Re(\lambda_\chi)\\
g_\chi &= -[(W-1)/2W]^{1/2}(kr)^{\gamma-1}C(\gamma,\eta)Im(\lambda_\chi)
\end{aligned} \tag{C.41}$$

ただし、単位系は、$\hbar=m_e=c=1$である。Einsteinの関係式は、$k^2=W^2-1$である。(Wは粒子のEnergy)

$$\begin{aligned}
\gamma &= +[\chi^2-(Z\alpha)^2]^{1/2},\\
\eta &= \left(\frac{\alpha ZW}{k}\right),\\
\lambda_\chi &= (\gamma+i\eta)exp[i(\varphi-kr)]_1F_1(\gamma+1+i\eta,2\gamma;2ikr),\\
e^{2i\varphi} &= e^{-i\pi}\left[\frac{\chi-i(Z\alpha/k)}{\gamma+i\eta}\right],-\pi<\varphi\le 0,\\
C(\gamma,\eta) &= 2^\gamma e^{\pi\eta/2}\frac{|\Gamma(\gamma+i\eta)|}{\Gamma(2\gamma+1)},\\
\alpha &= e^2\ \ (fine-structure\ constant)
\end{aligned} \tag{C.42}$$

Coulonb potential は $V(r) = -Ze^2/r$ であり、この解は electron の場合に対応する。positron の場合は、 $Z \to -Z$ と置き換えれば良い。f_χ, g_χの漸近的振る舞いは、

$$\begin{aligned} f_\chi &\sim [(W+1)/2W]^{1/2} j_{l(\chi)}(kr + \eta ln 2kr + \Delta_\chi) \\ g_\chi &\sim Sg\chi[(W-1)/2W]^{1/2} j_{l(\chi)}(kr + \eta ln 2kr + \Delta_\chi) \end{aligned} \tag{C.43}$$

である。ただし、Δ_χは relativistic Coulomb phase shift であり次のような関係にある。

$$\begin{aligned} \Delta_\chi &= \varphi + \frac{\pi}{2}\,[1 - \gamma + l(\chi)] - Arg[\Gamma(\gamma + i\eta)] \\ &= \delta_\chi + \frac{\pi}{2}\, l(\chi) \end{aligned} \tag{C.44}$$

C.5 Plane-wave solution

これから (平面波) + (入射球面波) と漸近的に一致する波動関数ψ^μを求める。ただし、ψ^μは次の式のようにψ^μ_χの線形結合である。

$$\psi^\mu \;=\; \sum_{\chi\neq 0} C_\chi \psi^\mu_\chi \tag{C.45}$$

また Dirac equation の平面波の解を次のように展開する。

$$\begin{aligned}
&[(W+1)/2W]^{1/2} exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})\; u^\mu_{1/2} \\
&= \; exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})\{[(W+1)/2W]^{1/2} - (\vec{\alpha}\cdot\hat{k})[(W-1)/2W]^{1/2}\} \\
&\quad \cdot\frac{1}{2}(1-\beta)X^\mu_{1/2}
\end{aligned} \tag{C.46}$$

漸近領域で、比較するには"large"components だけ比較すれば良い。よって、$\frac{1}{2}(1-\beta)$ を (C.46) 式に掛けて、平面波の部分波展開 (Rayliegh 展開) を用いれば良い。すると、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(1-\beta)[(W+1)/2W]^{1/2} exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) X^\mu_{1/2} \\
&= \; [(W+1)/2W]^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} [4\pi(2l+1)]^{1/2} i^l \; j_l(kr) \\
&\quad \cdot Y^0_l(\hat{r})\frac{1}{2}(1-\beta)X^\mu_{1/2} \\
&= \; [(W+1)/2W]^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} [4\pi|\chi|]^{1/2} i^l \; j_l(kr) \\
&\quad \cdot\frac{l-(\vec{\sigma}\cdot\vec{L})+l+1+(\vec{\sigma}\cdot\vec{L})}{[(2l+1)|\chi|]^{1/2}} Y^0_l(\hat{r})\frac{1}{2}(1-\beta)X^\mu_{1/2} \\
&= \; [(W+1)/2W]^{1/2} \sum_{\chi\neq 0} [4\pi|\chi|]^{1/2} \; j_{l_\chi}(kr) \\
&\quad \cdot(-Sg\chi)^{\mu+1/2}\phi^{(I)\mu}_\chi
\end{aligned} \tag{C.47}$$

(C.45) 式に$\frac{1}{2}(1-\beta)$ を掛け、ψ^μ_χの漸近形を用いると、

$$\psi^\mu \;=\; [(W+1)/2W]^{1/2} \sum_{\chi\neq 0} C_\chi j_{l_\chi}(kr + \eta ln 2kr + \Delta_\chi)\phi^{(I)\mu}_\chi \tag{C.48}$$

ここで、球 Bessel 関数の漸近形を示しておく。

$$j_l(\rho) \underset{\rho\to\infty}{\to} \frac{exp[i(\rho - \frac{l+1}{2}\pi)] - exp[-i(\rho-\frac{l+1}{2}\pi)]}{i\rho} \tag{C.49}$$

つまり、式 (C.49) は、(外向き球面波)+(内向き球面波) で表される。

(C.47) 式は、平面波の漸近形であるのに対して、(C.48) 式は、平面波と球面波の和である。(C_χよって形が変わる。) (C.47) 式と (C.48) 式が一致するための C_χの形は、((C.47) 式

に $exp(\pm i\eta ln2kr)$ を掛けておく)(C_χ^{in}の場合、外向き球面波部分が等しく、C_χ^{out}内向き球面波部分が等しいと置く。)

$$C_\chi^{in} = [4\pi|\chi|]^{1/2}(-Sg\chi)^{\mu+1/2}exp(-i\Delta_\chi) \tag{C.50}$$

$$C_\chi^{out} = [4\pi|\chi|]^{1/2}(-Sg\chi)^{\mu+1/2}exp(+i\Delta_\chi) \tag{C.51}$$

したがって (平面波) + (外 (内) 向き球面波) の形は、

$$\begin{aligned}\psi^{(\pm)\mu} &= \sum_{\chi\neq 0}[4\pi|\chi|]^{1/2}(-Sg\chi)^{\mu+1/2} \\ &\quad \cdot exp(\pm i\Delta_\chi)(f_\chi + ig_\chi(\vec{\alpha}\cdot\hat{r}))\ \phi_\chi^{(I)\mu}\end{aligned} \tag{C.52}$$

また次の関係式を使うと、

$$(f_\chi + ig_\chi(\vec{\alpha}\cdot\hat{r}))\ \phi_\chi^{(I)\mu} = \psi_\chi^\mu \tag{C.53}$$

$$c[l_\chi, 1/2, j_\chi; 0, \mu] = (-Sg\chi)^{\mu+1/2}\{|\chi|/[2l_\chi+1]\}^{1/2} \tag{C.54}$$

と書けるので、最終的な結果として、

$$\begin{aligned}\psi^{(\pm)\mu} &= \sum_{\chi\neq 0}\{4\pi[2l(\chi)+1]\}^{1/2}c[l_\chi, 1/2, j_\chi; 0, \mu] \\ &\quad \cdot exp(\pm i\Delta_\chi)\psi_\chi^\mu\end{aligned} \tag{C.55}$$

と表現できる。

C.6 How to change formulas for β^+ -decay

今までは、β^- -decay

$$\nu \ + \ n \ \rightarrow \ p \ + \ \beta^- \tag{C.56}$$

を扱ってきたが、これから、β^+ -decay

$$p \ + \ \bar{\nu} \ \rightarrow \ n \ + \ \beta^+ \tag{C.57}$$

に対する公式の変更を考える。β^- -decay の相互作用 Hamiltonian は、

$$\begin{aligned} H_{\beta^-} &= (\psi_p^* \gamma_4 \gamma_\mu \tau^- \psi_n)[\psi_e^* \gamma_\mu (C_V + C_V^{'} \gamma_5) \psi_\nu] \\ &\quad -(\psi_p^* \gamma_4 \gamma_\mu \tau^- \gamma_5 \psi_n)[\psi_e^* \gamma_4 \gamma_\mu (C_A + C_A^{'} \gamma_5) \psi_\nu] \end{aligned} \tag{C.58}$$

であるので、H_{β^-}の hermite conjugate を取ると、

$$\begin{aligned} H_{\beta^+} &= (H_{\beta^-})^\dagger \\ &= \{(\psi_p^* \gamma_4 \gamma_\mu \tau^- \psi_n)[\psi_e^* \gamma_\mu (C_V + C_V^{'} \gamma_5) \psi_\nu]\}^\dagger \\ &\quad -\{(\psi_p^* \gamma_4 \gamma_\mu \tau^- \gamma_5 \psi_n)[\psi_e^* \gamma_4 \gamma_\mu (C_A + C_A^{'} \gamma_5) \psi_\nu]\}^\dagger \end{aligned} \tag{C.59}$$

であるので、計算すると、

$$\begin{aligned} H_{\beta^+} &= (\psi_n^* \gamma_4 \gamma_\mu \tau^- \psi_p)[\psi_\nu^* \gamma_\mu (C_V - C_V^{'} \gamma_5) \psi_e] \\ &\quad -(\psi_n^* \gamma_4 \gamma_\mu \tau^- \gamma_5 \psi_p)[\psi_\nu^* \gamma_4 \gamma_\mu (C_A - C_A^{'} \gamma_5) \psi_e] \end{aligned} \tag{C.60}$$

となる。つまり、次のような変換法則に従う。

$$\begin{aligned} C_V \ \rightarrow \ C_V \ ; \ C_V^{'} \ &\rightarrow \ -C_V^{'} \\ C_A \ \rightarrow \ C_A \ ; \ C_A^{'} \ &\rightarrow \ -C_A^{'} \\ Z \ &\rightarrow \ -Z \end{aligned} \tag{C.61}$$

C.7 ^{22}Na β^+-decay における Asymmetry A $= \frac{1}{3}$の導出

$(\alpha)^{22}Na$ から放出されるβ^+-particle の波動関数

(C.41),(C.42) 式において、^{22}Na では、

$$\gamma = 1,\ \eta = 0,\ kR \ll 1.\ (R = nucleus\ radius) \tag{C.62}$$

と近似できる。すると残りの factor は、

$$\begin{aligned} Hypergeometric\ {}_1F_1(2,3,0) &= 1 \\ \varphi &= -\frac{\pi}{2}\ (for\ \chi = +1) \\ \varphi &= 0\ (for\ \chi = -1) \\ C(1,0) &= 1 \end{aligned} \tag{C.63}$$

となる。したがって、波動関数 f_χ, g_χ次のようになる。

$$\begin{aligned} f_{\chi=-1} &= [(W+1)/2W]^{1/2}\ ;\ g_{\chi=-1} = 0 \\ f_{\chi=1} &= 0\ ;\ g_{\chi=1} = [(W-1)/2W]^{1/2} \end{aligned} \tag{C.64}$$

(β)allowed β-decay transition における、Tensor 演算子 $T_{KL\gamma}$

K, L, γは、おのおの、$lepton$ 系 ($electron\ +\ neutrino$) の、全角運動量、全軌道角運動量、全 Spin を、意味する。

式 (C.5) より、Fermi transition に対しては、

$$\begin{aligned} K &= 0\ , L = 0\ , \gamma = 0, \text{より} \\ T^0_{000} &= 1 \end{aligned} \tag{C.65}$$

Gamov-Teller transition に対しては、

$$\begin{aligned} K &= 1\ , L = 0\ , \gamma = 1, \text{より} \\ T^1_{101} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_5\sigma_+,\ T^0_{101} = \gamma_5\sigma_3,\ T^{-1}_{101} = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_5\sigma_-, \end{aligned} \tag{C.66}$$

$(\gamma)B^{J,0}_J$ factor の計算値

$C_{KL\gamma} = C_{101}$かつ、$j(\chi_e) = j(\chi'_e) = j(\chi_\nu) = 1/2$より、式 (C.14) は、

$$
\begin{aligned}
& B_J^{J,0}(1,1;J_f,J_i) \\
&= 4\pi^2 \frac{2J+1}{2J_i+1} \frac{2^{1/2}}{[3\times 3(2J+1)]^{1/2}} \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & J \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \sum_{\chi_e \chi'_e \chi_\nu} (-)^{l'_e} \\
&\quad \cdot [2l(\chi_e)+1][2l(\chi'_e)+1]^{1/2} 2 \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} l(\chi_e) & l(\chi'_e) & J \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & J \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l(\chi_e) & l(\chi'_e) & J \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & J \end{Bmatrix} \\
&\quad \cdot exp[+i(\Delta_{\chi_e} - \Delta_{\chi'_e})] \\
&\quad \cdot C_{101}[J_i, J_f; 1/2, 1/2] C^*_{101}[J_i, J_f; 1/2, 1/2]
\end{aligned} \tag{C.67}
$$

このとき、$J = 0,\ 1$の場合だけ考えれば良い。(ここから、$b_J = B_J^{J,0}$と定義する。) 式 (C.20),(C.21) および (α) を用いて計算すると、

$$
\begin{aligned}
b_0 &= 4\pi^2 \frac{1}{2J_i+1} \frac{\sqrt{2}}{3} (\frac{1}{\sqrt{3}})^{-1} [\dots] \\
[\dots] &= \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{2} [C_{101}(-1,-1) C^*_{101}(-1,-1) + C_{101}(-1,1) C^*_{101}(-1,1)] \\
&\quad -3 \cdot 2 (-\frac{1}{\sqrt{3}}) \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{2\sqrt{3}} [C_{101}(1,-1) C^*_{101}(1,-1) + C_{101}(1,1) C^*_{101}(1,1)] \\
b_0 &= \frac{1}{2J_i+1} \frac{1}{6} [\sqrt{3} f^*_{-1} \sqrt{3} f_{-1} + \sqrt{3} f^*_{-1} \sqrt{3} f_{-1} + \sqrt{3} g_1 \sqrt{3} g^*_1 + \sqrt{3} g_1 \sqrt{3} g^*_1] (|C_A|^2 + |C'_A|^2) \int |\vec{\sigma}|^2 \\
&= \frac{1}{4} (|C_A|^2 + |C'_A|^2) \int |\vec{\sigma}|^2
\end{aligned} \tag{C.68}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1 &= 4\pi^2 \frac{1}{2J_i+1} \sqrt{3} \frac{\sqrt{2}}{3} (\frac{1}{\sqrt{6}})^{-1} [\dots] \\
[\dots] &= \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{3}}) (-\frac{1}{3}) (-\frac{1}{6}) e^{i(\delta_1 - \delta_{-1})} [C_{101}(1,-1) C^*_{101}(-1,-1) + C_{101}(1,1) C^*_{101}(-1,1)] \\
&\quad -\sqrt{3} \cdot 2 (-\frac{1}{\sqrt{3}}) (-\frac{1}{3}) \frac{1}{6} e^{i(\delta_{-1} - \delta_1)} [C_{101}(-1,-1) C^*_{101}(1,-1) + C_{101}(-1,1) C^*_{101}(1,1)] \\
b_1 &= -\frac{1}{2J_i+1} \frac{1}{9} [\sqrt{3} g^*_1 \sqrt{3} f_{-1} + \sqrt{3} g^*_1 \sqrt{3} f_{-1} + \sqrt{3} g_1 \sqrt{3} f^*_{-1} + \sqrt{3} g_1 \sqrt{3} f^*_{-1}] (C_A C^{*\prime}_A + C'_A C^*_A) \int |\vec{\sigma}|^2 \\
&= -\frac{1}{6} \frac{v}{c} (C_A C^{*\prime}_A + C'_A C^*_A) \int |\vec{\sigma}|^2
\end{aligned} \tag{C.69}
$$

$(\delta) F_J^{J,0}$ -factor の計算値

式 (C.15)(C.88) を用いて計算する。

$$
\begin{aligned}
F_0^{0,0}(K,K') &= \delta_{KK'} \\
F_1^{1,0}(1,1:2,3) &= \sqrt{7}\sqrt{5}\sqrt{3}^4(-)\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{(-)}{\sqrt{3}\sqrt{7}}\frac{1}{3\sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
F_1^{0,1}(2,2:0,2) &= \sqrt{5}\sqrt{3}\sqrt{5}^2\sqrt{3}(-\frac{1}{\sqrt{30}})\frac{(-)}{\sqrt{5}}(-)\frac{1}{\sqrt{15}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
\tag{C.70}
$$

(ϵ) Asymmetry parameter $A = \frac{1}{3}$の導出
式 (C.24),(C.26) に、(γ),(δ) で求めた値を代入すると、

$$
\begin{aligned}
W(\theta_{e\gamma}) &= \frac{32\pi}{2J_f+1}\frac{1}{4}(|C_A|^2+|C'_A|^2)\int|\vec{\sigma}|^2 \\
P_{circ}(\theta_{e\gamma}) &= -\frac{2J_f+1}{32\pi W(\theta_{e\gamma})}\frac{1}{6}\frac{v}{c}(C_AC^{*\prime}_A+C'_AC^*_A)\int|\vec{\sigma}|^2(-)\frac{1}{2}(=F_1^{1,0}\cdot F_1^{0,1})(-)\cos\theta_{e\gamma} \\
A &= -\frac{1}{3}\ \frac{(C_AC^{*\prime}_A+C'_AC^*_A)}{(|C_A|^2+|C'_A|^2)}
\end{aligned}
\tag{C.71}
$$

したがって、Asymmetry factor は、次のように求まる。

$$
\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{3}\ (for\ \beta^- - decay) \\
&= \frac{1}{3}\ (for\ \beta^+ - decay)
\end{aligned}
\tag{C.72}
$$

C.8 Clebsch-Gordan 係数の覚え書き

ここでは、$\beta-\gamma$ correlation の計算上必要な知識として、Clebsch-Gordan 係数などの角運動量代数に関することを述べる。(Reference Messiah and Rose)

(0) 基礎

角運動量演算子の交換関係

$$\begin{aligned}[J_i \ , \ J_j \ ] &= i\varepsilon_{ijk}J_k \ ; i,j,k \ = \ x,y,z. \\ [\ \vec{J}^2 \ , \ J_i \ ] &= 0. \end{aligned} \tag{C.73}$$

角運動量演算子$\vec{J}^2$, J_z の固有状態 $|j,m\rangle$

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 \ |j,m\rangle &= j \ |j,m\rangle \\ J_z \ |j,m\rangle &= m \ |j,m\rangle \end{aligned} \tag{C.74}$$

(1)Clebsh-Gordan 係数 $\langle j_1,m_1,j_2,m_2|J,M\rangle$

定義$\vec{J}=\vec{j}_1+\vec{j}_2$の合成に対しての、

$$|J,M\rangle \ = \ \sum_{m_1,m_2} |j_1,m_1,j_2,m_2\rangle\langle j_1,m_1,j_2,m_2|J,M\rangle \tag{C.75}$$

合成係数のことである。

$\langle 3-j\rangle$ 係数との関係

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \ = \ \frac{(-)^{j_1-j_2+M}}{\sqrt{2J+1}}\langle j_1,m_1,j_2,m_2|J,M\rangle \tag{C.76}$$

C.G. 係数の性質

(α)Reality

$$\langle j_1,m_1,j_2,m_2|J,M\rangle^* \ = \ \langle j_1,m_1,j_2,m_2|J,M\rangle \tag{C.77}$$

(β)Selection rule

$$\begin{aligned} m_1 \ + \ m_2 \ &= \ M \\ |j_1-j_2| \ \leq \ J \ &\leq \ j_1+j_2 \\ &\text{それ以外は } 0 \end{aligned} \tag{C.78}$$

(γ) 対称性

$$\begin{aligned} \langle j_1,m_1,j_2,m_2|J,M\rangle &= (-)^{j_1+j_2-J}\langle j_1,-m_1,j_2,-m_2|J,-M\rangle \\ &= (-)^{j_1+j_2-J}\langle j_2,m_2,j_1,m_1|J,M\rangle \\ &= (-)^{j_2+m_2}\left(\frac{2J+1}{2j_1+1}\right)^{1/2}\langle J,-M,j_2,m_2|j_1,m_1\rangle \end{aligned} \tag{C.79}$$

(δ) 直交関係

$$\begin{aligned}\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\langle j_1,m_1,j_2,m_2|J,M\rangle\langle j_1,m_1,j_2,m_2|J',M'\rangle &= \delta_{JJ'}\delta_{MM'}\\ \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\sum_{M=-J}^{J}\langle j_1,m_1,j_2,m_2|J,M\rangle\langle j_1,m_1',j_2,m_2'|J,M\rangle &= \delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'}\end{aligned} \tag{C.80}$$

(2)$\langle 6-j\rangle$ 係数 $\left\{\begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{array}\right\}$

$|j_1(j_2j_3)J_{23};J\rangle$ と $|(j_1j_2)J_{12}j_3;J\rangle$ は $Unitary$ 変換で結び付けられる。その変換係数を、$\langle 6-j\rangle$ 係数と呼ぶ。

定義

$$\begin{aligned}&\langle j_1(j_2j_3)J_{23};J|(j_1j_2)J_{12}j_3;J\rangle\\ =\ &\sqrt{2J_{12}+1}\sqrt{2J_{23}+1}(-)^{j_1+j_2+j_3+J}\left\{\begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & J & J_{23} \end{array}\right\}\end{aligned} \tag{C.81}$$

$\langle 6-j\rangle$ 係数の性質

(α)Reality

値は実数である。

(β)Selection rule $\left\{\begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{array}\right\}$に対して (j_1,j_2,j_3),(j_1,J_2,J_3),(J_1,j_2,J_3),(J_1,J_2,j_3) は、三角不等式を満たしかつ三数の和は整数である。

(γ) 対称性

任意の列の入れ替えに対して対称

$$\left\{\begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ccc} j_2 & j_1 & j_3 \\ J_2 & J_1 & J_3 \end{array}\right\} \tag{C.82}$$

ある二列の行の入れ替えに対して対称

$$\left\{\begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ccc} J_1 & J_2 & j_3 \\ j_1 & j_2 & J_3 \end{array}\right\} \tag{C.83}$$

$\left\{\begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{array}\right\}$は、$(j_1,j_2,j_3)$,$(j_1,J_2,J_3)$,$(J_1,j_2,J_3)$,$(J_1,J_2,j_3)$ の Clebsch-Gordan 係数を結び付けた係数である。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{M_1M_2M_3m_1m_2} (-)^{J_1+J_2+J_3+M_1+M_2+M_3} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & j_3 \\ M_1 & -M_2 & m_3 \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} J_2 & J_3 & j_1 \\ M_2 & -M_3 & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_3 & J_1 & j_2 \\ M_3 & -M_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3' \\ m_1 & m_2 & m_3' \end{pmatrix} \\
= \quad & \delta_{j_3j_3'}\delta_{m_3m_3'} \frac{1}{2j_3+1} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{C.84}
$$

(3)$\langle 9-j\rangle$ 係数 $\begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_4 & J_5 & J_6 \\ J_7 & J_8 & J_9 \end{Bmatrix}$

$\langle 6-j\rangle$ 係数と同様に $|(j_1j_2)J_{12}(j_3j_4)J_{34};J\rangle$ と $|(j_1j_3)J_{13}(j_2j_4)J_{24};J\rangle$ は Unitary 変換で結び付けられる

定義

$$
\begin{aligned}
&\langle (j_1j_2)J_{12}(j_3j_4)J_{34};J,M|(j_1j_3)J_{13}(j_2j_4)J_{24};J',M'\rangle \\
= \quad & \delta_{JJ'}\delta_{MM'}\sqrt{2J_{12}+1}\sqrt{2J_{34}+1}\sqrt{2J_{13}+1}\sqrt{2J_{24}+1} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{C.85}
$$

$\langle 9-j\rangle$ 係数の特徴

(α) 対称性

$\begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_4 & J_5 & J_6 \\ J_7 & J_8 & J_9 \end{Bmatrix}$ 二列の入れ替え、または、二行の入れ替えに対して、$(-)^R$倍 (ただし $R=\sum_{i=1}^{9} J_i$である。) さらに、二つの対角線の反転に対して不変。

(β) 直交関係

$$
\begin{aligned}
&\sum_{J_{13}J_{24}} (2J_{13}+1)(2J_{24}+1)(2J_{12}+1)(2J_{34}+1) \\
&\cdot \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12}' \\ j_3 & j_4 & J_{34}' \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix} \\
= \quad & \delta_{J_{12}J_{12}'}\delta_{J_{34}J_{34}'}
\end{aligned} \tag{C.86}
$$

(γ) $\langle 6-j\rangle$ 係数との関係

$$
\begin{aligned}
&\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{array} \right\} \\
&= \sum_g (-)^g (2g+1) \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & J_{12} \\ J_{34} & J & g \end{array} \right\} \\
&\cdot \left\{ \begin{array}{ccc} j_3 & j_4 & J_{34} \\ j_2 & g & J_{24} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} J_{13} & J_{24} & J \\ g & j_1 & j_3 \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{C.87}
$$

(δ) j の一つが 0 の場合

$$
\begin{aligned}
&\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & f \\ j_3 & j_4 & f' \\ g & g' & 0 \end{array} \right\} \\
&= \delta_{ff'}\delta_{gg'} \frac{(-)^{j_2+j_3+f+g}}{\sqrt{(2f+1)(2g+1)}} \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & f \\ j_4 & j_3 & g \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{C.88}
$$

(4) 回転行列

(α, β, γ) は、Eular angle とすると、回転演算子は、

$$
R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z} \tag{C.89}
$$

と表される。すると、回転行列 D_Jは、次のように定義される。

$$
D_J^{MM'} = \langle JM | R(\alpha, \beta, \gamma) | JM' \rangle \tag{C.90}
$$

回転行列 D_Jの性質

(α) 行列的性質

$$
\begin{aligned}
[D_J(\alpha, \beta, \gamma)]^{-1} &= D_J(-\gamma, -\beta, -\alpha) \\
detD_J &= 1
\end{aligned} \tag{C.91}
$$

(β) 対称性

$$
D_J^{MM'*} = (-)^{M-M'} D_J^{-M-M'} \tag{C.92}
$$

(γ)Unitary 性

$$
\sum_M D_J^{MM'} D_J^{MM''} = \delta_{M'M''} \tag{C.93}
$$

(δ)Tensor product

$$
\begin{aligned}
&D_{j_1}^{m_1 m_1'} D_{j_2}^{m_2 m_2'} \\
&= \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M,M'=-J}^{J} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle D_J^{MM'} \langle j_1, m_1', j_2, m_2' | J, M' \rangle
\end{aligned} \tag{C.94}
$$

(5) 既約 Tensor 演算子

定義

Tensor 演算子とは、回転によって互いに線形に変換される演算子の組のことである。

Rank K の Tensor 演算子 $T^{(k)}_q$ $q = -k, \ldots, k$ は、角運動量演算子との間に次の交換関係を満たす。

$$\begin{aligned} [J_\pm \ , \ T^{(k)}_q] &= \sqrt{k(k+1) - q(q \pm 1)}\ T^{(k)}_{q\pm 1} \\ [J_z \ , \ T^{(k)}_q] &= q\ T^{(k)}_q \end{aligned} \tag{C.95}$$

Tensor 演算子の基本的な定理

(α)Wigner-Eckart

$$\begin{aligned} \langle \tau J M | T^{(k)}_q | \tau' J' M' \rangle &= (-)^{J-M} \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & q & M' \end{pmatrix} \langle \tau J || T^{(k)} || \tau' J' \rangle \\ &= \frac{(-)^{2k}}{\sqrt{2J+1}} \langle J' M' k q | J M \rangle \langle \tau J || T^{(k)} || \tau' J' \rangle \end{aligned} \tag{C.96}$$

(β)Rank K の Tensor product

$$\begin{aligned} V^{(K)} &= [T^{k_1} \bigotimes U^{k_2}]_K \\ V^{(K)}_Q &= \sum_{q_1, q_2} \langle k_1 q_1 k_2 q_2 | K Q \rangle T^{(k_1)}_{q_1} U^{(k_2)}_{q_2} \end{aligned} \tag{C.97}$$

formula

$$\begin{aligned} & \langle \tau_1 \tau_2 J_1 J_2 J || V^{(k)} || \tau'_1 \tau'_2 J'_1 J'_2 J' \rangle \\ = & \sqrt{(2J+1)(2K+1)(2J'+1)} \begin{Bmatrix} J'_1 & J'_2 & J' \\ k_1 & k_2 & K \\ J_1 & J_2 & J \end{Bmatrix} \\ & \cdot \langle \tau_1 J_1 || T^{(k_1)} || \tau'_1 J'_1 \rangle \langle \tau_2 J_2 || U^{(k_2)} || \tau'_2 J'_2 \rangle \end{aligned} \tag{C.98}$$

付 録D　Polarization Compton Scattering

(ここの内容は、Peskin をかなり参考にしている。) Feynman diagram より、不変散乱振幅 m は次のようになる。

$$\begin{aligned} im &= -ie^2\epsilon^*_\mu(k')\epsilon_\nu(k) \\ &\quad \cdot\bar{u}(p')\left[\frac{\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p\cdot k} + \frac{-\gamma^\nu \not{k}'\gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu}{-2p\cdot k'}\right]u(p) \end{aligned} \tag{D.1}$$

さらに、complex conjugate をとると、次のようになる。

$$\begin{aligned} -im^* &= ie^2\epsilon_\mu(k')\epsilon^*_\nu(k) \\ &\quad \cdot\bar{u}(p)\left[\frac{\gamma^\nu \not{k}\gamma^\mu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p\cdot k} + \frac{-\gamma^\mu \not{k}'\gamma^\nu + 2\gamma^\nu p^\mu}{-2p\cdot k'}\right]u(p') \end{aligned} \tag{D.2}$$

(D.2) 式で、$\mu \to \sigma$、$\nu \to \rho$ の文字の置き換えを行い、(D.1) 式と (D.2) 式を掛け合わせて、終状態の $Spinsum$ をとる。まず終状態の Spin sum をとると、次の公式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sum_{s=\pm 1} u(p')\ \bar{u}(p') &= \not{p}' + m \\ \sum_{\pm} \epsilon^*_\mu(k')\ \epsilon_\sigma(k') &= -g_{\mu\sigma} \end{aligned} \tag{D.3}$$

さらに、始状態に対して次の式が成り立つ。

$$u(p)\ \bar{u}(p) = (\not{p} + m)\frac{1+\gamma^5\ \not{s}}{2} \tag{D.4}$$

ただし、$s^\mu = (0, s^1, s^2, s^3)$(静止した electron の Spin) である。

$$\begin{aligned} \sum_{final\ \ state} |m|^2 &= e^4(-g_{\mu\sigma})\epsilon_\nu(k)\epsilon^*_\rho(k)\ Tr[***] \\ [***] &= \left[\frac{\gamma^\rho \not{k}\gamma^\sigma + 2\gamma^\sigma p^\rho}{2p\cdot k} + \frac{-\gamma^\sigma \not{k}'\gamma^\rho + 2\gamma^\rho p^\sigma}{-2p\cdot k'}\right](\not{p}' + m) \\ &\quad \left[\frac{\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p\cdot k} + \frac{-\gamma^\nu \not{k}'\gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu}{-2p\cdot k'}\right](\not{p} + m)\frac{1+\gamma^5\ \not{s}}{2} \end{aligned} \tag{D.5}$$

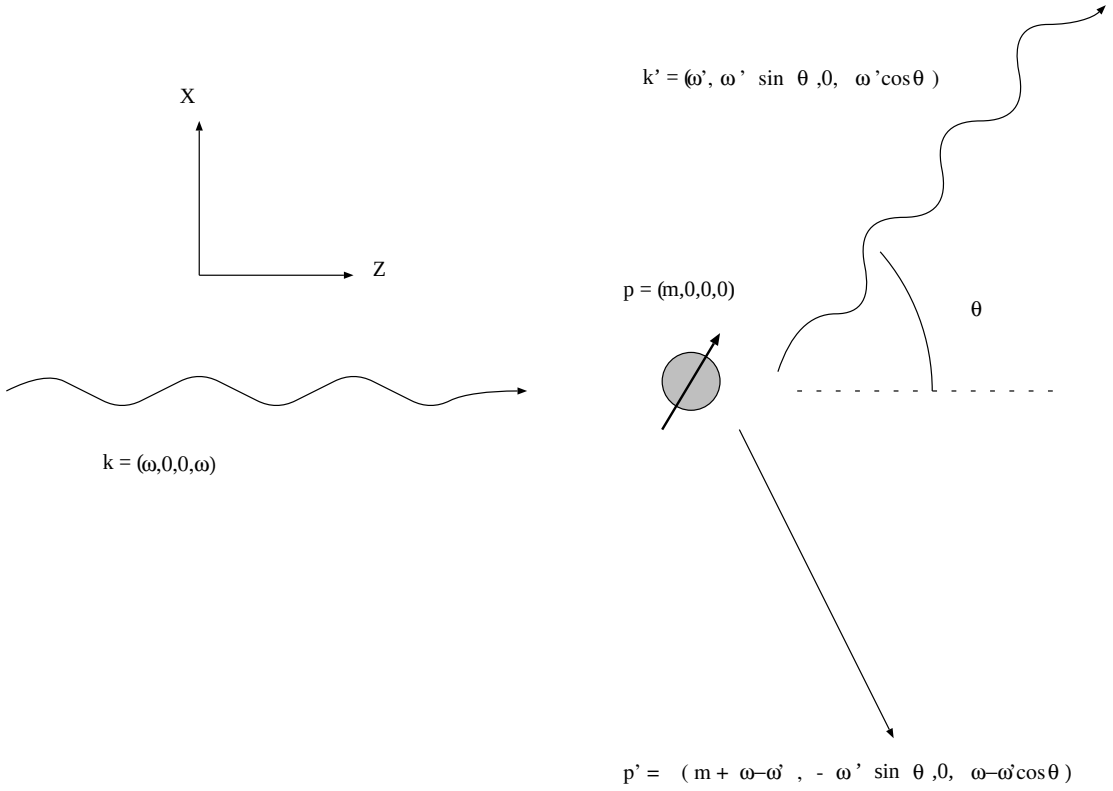


図 D.1: Compton scattering x-z plane

Trace 計算をするため、$\gamma\ -matrix$ の公式を述べておく。

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma_\mu &= 4\ ,\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu\ =\ -2\gamma^\nu, \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho}\ ,\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu\ =\ -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu. \\
Tr(\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d) &= 4(g^{ab}g^{cd}-g^{ac}g^{bd}+g^{ad}g^{bc})\ ,\ Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu)\ =\ 4g^{\mu\nu} \\
Tr(\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d\gamma^5) &= -4i\epsilon^{abcd}\ ,\ Tr(\text{ 奇数個の}\gamma\text{ の積})\ =\ 0\ .
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Energy-Momentum の基本的関係式を述べておく。

$$\begin{aligned}
p+k &= p'+k'\ ;\ p^2+p'^2=m^2\ ;\ k^2=k'^2=0; \\
p\cdot k &= p'\cdot k'\ ;\ p'\cdot k=p\cdot k'.
\end{aligned} \tag{D.7}$$

具体的設定 $x-z$ 平面での散乱を考える。
ただし、$s=(0,s^1,0,s^3)$,$\epsilon^{\mu(\pm)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,\pm i,0)$ である。この時次の関係式が成り立つ。

$$k\cdot\epsilon\ =\ p\cdot\epsilon\ =\ p\cdot s\ =\ p\cdot\epsilon\ =\ p\cdot\epsilon'\ =\ 0$$

ωとω'の関係は、

$$\epsilon'=\frac{\omega}{1+\frac{\omega}{m}(1-\cos\theta)} \tag{D.8}$$

式 (D.5) の計算の結果を次に示していく。式 (D.5) の計算において、Tr 奇数個のγの積 $=0$ を用いたりした結果 $(\not{p}'\times\ \not{p}\times 1)$, $(m\times m\times 1)$, $(\not{p}'\times m\times\gamma^5\ \not{s})$, $(m\times\ \not{p}\times\gamma^5\ \not{s})$ の項だけ残る。(計算過程は省略する。根気よく計算すれば、導出できますので、)

$(\not{p}'\times\ \not{p}\times 1)$ 、$(m\times m\times 1)$ の二つの項より、

$$\sum_{partial}|m|^2 \;=\; 2e^4\left[\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right] \tag{D.9}$$

となり、Klein - Nishina formula が導かれる。

$(\not{p}'\times m\times\gamma^5\ \not{s})$、 $(m\times\ \not{p}\times\gamma^5\ \not{s})$ 二つの項より、

$$\begin{aligned}\sum_{partial}|m|^2 &= -2e^4s^3\left[\frac{\omega}{m}+\frac{\omega'}{m}\right]\cos\theta(1-\cos\theta)\\ &\quad -2e^4\frac{\omega'}{m}\sin\theta(1-\cos\theta)\\ &= -2e^4\tau(1-\cos\theta)\vec{s}\cdot\left[\frac{\vec{k}}{m}\cos\theta+\frac{\vec{k'}}{m}\right]\end{aligned} \tag{D.10}$$

と、偏極の効果が導き出される。式 (D.9),(D.10) をまとめて、

$$\begin{aligned}\sum|m|^2 &= 2e^4\left[\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right]\\ &\quad -2e^4\tau(1-\cos\theta)\vec{s}\cdot\left[\frac{\vec{k}}{m}\cos\theta+\frac{\vec{k'}}{m}\right]\end{aligned} \tag{D.11}$$

(D.1) の系における、phase space integral は、次のようになる。

$$\begin{aligned}\int d\Pi &= \int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega'}\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E'}(2\pi)^2\delta^4(k'+p'-k-p)\\ &= \int\frac{(\omega')^2d\omega'd\Omega}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\omega'E'}\\ &\quad\times 2\pi\delta(\omega'+\sqrt{m^2+\omega^2+(\omega')^2-2\omega\omega'\cos\theta}-\omega-m)\\ &= \int\frac{d\cos\theta}{2\pi}\frac{\omega'}{4E'}\frac{1}{\left|1+\frac{\omega'-\omega\cos\theta}{E'}\right|}\\ &= \frac{1}{8\pi}\int d\cos\theta\frac{\omega'}{m+\omega(1-\cos\theta)}\\ &= \frac{1}{8\pi}\int d\cos\theta\frac{(\omega')^2}{\omega m}\end{aligned} \tag{D.12}$$

一方、一般的な cross-section の公式は、次の式である。

$$\begin{aligned}d\sigma &= \frac{1}{2E_A2E_B|v_A-v_B|}\left(\prod_{final}\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\right)\\ &\quad\times|M(p_Ap_B)\to\{p_f\}|^2(2\pi)^4\delta^4(p_A+p_B-\sum p_f)\end{aligned} \tag{D.13}$$

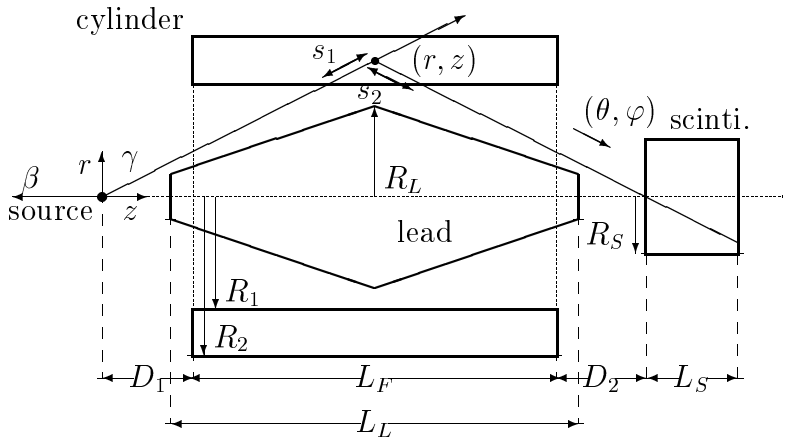
この式に、$|v_A - v_B| = 1$ および式 (D.10)(D.11)(D.12) を代入して、

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{1}{2\omega}\frac{1}{2m}\cdot\frac{1}{8\pi}\frac{(\omega')^2}{\omega m}\cdot\left(\sum_{final\ \ spin}|m|^2\right) \\ &= \frac{\pi\alpha^2}{m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left[\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta-\tau(1-\cos\theta)\vec{S}\cdot\left(\frac{\vec{k}}{m}\cos\theta+\frac{\vec{k'}}{m}\right)\right] \quad \text{(D.14)}\end{aligned}$$

つまり、polarization compton scaterring の differential cross-section は、次のようになる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left[\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta-\tau(1-\cos\theta)\vec{S}\cdot\left(\frac{\vec{k}}{m}\cos\theta+\frac{\vec{k'}}{m}\right)\right] \quad \text{(D.15)}$$

付 録E　Mathematicaによる asymmetryの数値計算



E.1　Formulation

本実験のsettingにおいて、偏極$\vec{s}$を持つ電子によるγのComptonの散乱のうち、同時に放出されたβがありenergy E_eを持つもののcount rateは

$$N_{\vec{s}}(E_e) \propto \sum_{p=\pm 1} 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r\,dr \int_{D_1}^{D_1+L_{\rm F}} dz \cdot \int_{\theta_{\rm min}}^{\theta_{\rm max}} \sin\theta\,d\theta \int_{-\varphi_{\rm max}}^{\varphi_{\rm max}} d\varphi \cdot \frac{W(E_e,z,r)}{4\pi(r^2+z^2)} \cdot e^{-\mu_1 s_1} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\varphi) \cdot e^{-\mu_2 s_2} \cdot \varepsilon(z,r,\theta,\varphi) \cdot n_{\rm Fe} \quad \text{(E.1)}$$

で与えられる。以下に(E.1)各部の説明を行う。

- 座標
  - 座標系1: sourceを原点とし、cylinderにあわせて取った円柱座標。
    散乱した点は、角度部分を省いて(r,z)で表示。
  - 座標系2: 散乱した点を原点としγの入射方向を$\theta=0$とする球座標。
    散乱の方向は、角度部分(θ,φ)で表示する。

  (θ,φ)の積分範囲がscintillatorを包むように$\theta_{\rm min},\theta_{\rm max},\varphi_{\rm max}$を取る。

- $W(E_e, z, r) = 1 + A\,p(\frac{v}{c})\cos\theta_{\beta\gamma}$: β-γ相関
  - A: 理論によると $1/3$
  - p: γの偏極
    -1: left-handed,　$+1$: right-handed
  - v: βの velocity
    電子質量を m として $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - (\frac{mc^2}{E_e})^2}$
  - $\theta_{\beta\gamma}$: βとγのなす角
    $\cos\theta_{\beta\gamma} = -z/\sqrt{r^2 + z^2}$
- μ_1, μ_2: 吸収係数

  γの energy の関数であるが、table で近似する。実際にはγの偏極にもよるが、ここでは無視した。$\mu_1 = \mu_2$
- $\frac{d\sigma}{d\Omega}$: Compton 散乱の微分断面積

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{{r_e}^2}{2}(\frac{\omega'}{\omega})^2[(1+\cos^2\theta) + (\frac{\omega}{m} - \frac{\omega'}{m})(1-\cos\theta) \\ - p(1-\cos\theta)\vec{s}\cdot(\frac{\boldsymbol{k}}{m}\cos\theta + \frac{\boldsymbol{k'}}{m})]\end{aligned} \tag{E.2}$$

  - $\boldsymbol{k}, \omega$: 入射γの momentum、energy
    $\omega = 1.275\mathrm{MeV}$
  - $\boldsymbol{k'}, \omega'$: 散乱γの momentum、energy
    $\omega' = \frac{m\omega}{m+\omega(1-\cos\theta)}$
  - $\vec{s}$: 電子の偏極 $(|\vec{s}| = 2.06/26)$
  - r_e: 古典電子半径

座標系 1 で$\boldsymbol{k} = (\omega\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}, 0, \omega\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}})$ であり、
座標系 2 で$\boldsymbol{k'} = (\omega', \theta, \varphi)$ である。
座標系 1 で$\vec{s} = (0, 0, s)$ ならば座標系 2 では$\vec{s} = (s, \theta_{\beta\gamma}, 0)$ と表され、
座標系 1 で$\vec{s} = (0, 0, -s)$ ならば座標系 2 では$\vec{s} = (s, \theta_{\beta\gamma}, \pi)$ と表される。
以上より$\vec{s} = \pm s\hat{\boldsymbol{z}}$に対して

$$\vec{s}\cdot(\frac{\boldsymbol{k}}{m}\cos\theta + \frac{\boldsymbol{k'}}{m})] = \pm\frac{s}{\sqrt{r^2+z^2}}[\frac{\omega}{m}z\cos\theta + \frac{\omega'}{m}(r\sin\theta\cos\varphi + z\cos\theta)]$$

であるから、(E.2) を p に依存する部分としない部分に別けて書く。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}_{\text{indep.}} \pm p\, s \frac{d\sigma}{d\Omega}_{\text{dep.}}$$

$$\begin{cases} \frac{d\sigma}{d\Omega}_{\text{indep.}} = \frac{{r_e}^2}{2}(\frac{\omega'}{\omega})^2[(1+\cos^2\theta) + (\frac{\omega}{m} - \frac{\omega'}{m})(1-\cos\theta)] \\ \frac{d\sigma}{d\Omega}_{\text{dep.}} = \frac{{r_e}^2}{2}(\frac{\omega'}{\omega})^2(1-\cos\theta)\cdot[\frac{\omega}{m} z\cos\theta + \frac{\omega'}{m}(r\sin\theta\cos\varphi + z\cos\theta)] \end{cases}$$

- ε: 検出効率
  - γが鉛に当たるとき$\varepsilon = 0$
  - γが scintillator を長さ d にわたって通過するとき、$\varepsilon = 1 - e^{-\mu d}$
    ただしμは scintillator の吸収係数で、table で近似する。
  - γが scintillator に当たらないとき、$\varepsilon = 0$
- n_{Fe}: 鉄原子の個数密度

E.2 Asymmetry

count rate の式 (E.1) のうち p に依存するのは W と $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ の部分のみであるから、p についての和を先に実行する。

$$\begin{aligned} \sum_{p=\pm 1} W\cdot\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \sum_{p=\pm 1}[\frac{d\sigma}{d\Omega}_{\text{indep.}} \pm A\, p^2 s\sqrt{1-(\frac{mc^2}{E_e})^2}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\frac{d\sigma}{d\Omega}_{\text{dep.}} \\ &\qquad + (\text{1st order of } p)] \\ &\propto \frac{d\sigma}{d\Omega}_{\text{indep.}} \pm A\, s\sqrt{1-(\frac{mc^2}{E_e})^2}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\frac{d\sigma}{d\Omega}_{\text{dep.}} \end{aligned}$$

ここで $W_{\text{dep.}} = \sqrt{1-(\frac{mc^2}{E_e})^2}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$ とおいて (E.1) を書き直すと

$$N_{\pm s}(E_e) \propto n_1(E_e) \pm A\, s\, n_2(E_e)$$

$$\begin{cases} n_1(E_e) = 2\pi\int_{R_1}^{R_2} r\,dr\int_{D_1}^{D_1+L_{\text{F}}} dz\cdot\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}}\sin\theta\,d\theta\int_{-\varphi_{\max}}^{\varphi_{\max}} d\varphi \\ \qquad\qquad \cdot\frac{1}{4\pi(r^2+z^2)}\cdot e^{-\mu_1 s_1}\cdot\frac{d\sigma}{d\Omega}_{\text{indep.}}\cdot e^{-\mu_2 s_2}\cdot\varepsilon\cdot n_{\text{Fe}} \\ n_2(E_e) = 2\pi\int_{R_1}^{R_2} r\,dr\int_{D_1}^{D_1+L_{\text{F}}} dz\cdot\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}}\sin\theta\,d\theta\int_{-\varphi_{\max}}^{\varphi_{\max}} d\varphi \\ \qquad\qquad \cdot\frac{W_{\text{dep.}}}{4\pi(r^2+z^2)}\cdot e^{-\mu_1 s_1}\cdot\frac{d\sigma}{d\Omega}_{\text{dep.}}\cdot e^{-\mu_2 s_2}\cdot\varepsilon\cdot n_{\text{Fe}} \end{cases}$$

となる。asymmetry $\mathcal{A}$ は

$$\mathcal{A} = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} = A\, s\frac{n_2(E_e)}{n_1(E_e)} \tag{E.3}$$

asymmetry が v/c に比例するとして、その比例係数を求めたいのだが、asymmetry は (E.3) によって E_eの関数として表され、v/c について解くのは困難である。そこで $E_{\min}$から $E_{\max}$

までの何点かの E_eについて v/c と $\mathcal{A}$ をプロットし、それを直線で fit して係数を得ることにする。$E_{\max} = 546\mathrm{keV} + m\,c^2$である。$E_{\min}$は Discri 等から決まる量なので $100\mathrm{keV} + m\,c^2$ 程度に取っておけば十分であろう。

E.3 Mathematica

E.3.1 Character

次に Mathematica のコードを示すが、コード中の記号とこれまでの議論で使った記号が異なるものもあるので、以下に示しておく。

m	→	m	$\theta_{\max}$	→	thmax
c	→	c	$\theta_{\min}$	→	thmin
r_e	→	re	$\varphi_{\max}$	→	phimax
ω	→	omega	E_e	→	ee
D_1	→	d1	$E_{\max}$	→	emax
D_2	→	d2	$E_{\min}$	→	emin
L_F	→	lf	μ_1, μ_2	→	sigmafe
L_S	→	ls	μ	→	sigmasc
L_L	→	ll	ω'	→	omega1
R_1	→	r1	$W_{\mathrm{dep.}}$	→	fdp
R_2	→	r2	ρ	→	rho
R_S	→	rs	s_1	→	s1
R_L	→	rl	s_2	→	s2
s	→	s	$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{\mathrm{indep.}}$	→	dcsip
n_{Fe}	→	nfe	$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{\mathrm{dep.}}$	→	dcsdp
θ	→	th	n_1	→	nip
φ	→	phi	n_2	→	ndp
ε	→	epsilon	$\mathcal{A}$	→	asym

E.3.2 Code

```
(* CGS unit system is used *)

m =9.1093897 10^-31 10^3
 (* electron mass *)
c =2.99792458 10^10
 (* speed of light *)
re =2.81794092 10^-15 10^2
 (* classical electron radius *)
```

```
listfe1 = {-10.0, -8.75, -7.5, -6.25, -5.0, -3.75,
 -2.5, -1.25, 0.0, 1.25, 2.5, 3.75, 5.0}
listfe2 = {1.89, 1.22, 0.71, 0.37, 0.12, -0.11,
 -0.32, -0.50, -0.74, -0.94, -1.18, -1.33, -1.59}
listfe2 = 10 listfe2 / 3.34
listfe = Transpose[{(listfe1),(listfe2)}]
listsc1 = {0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6,
 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 4.0, 5.0,
 6.0, 7.0, 8.0, 9.0 ,10.0}
listsc2 = {4.5, 2.675, 1.375, 0.425, -0.275, -1.075,
 -1.475, -1.750, -1.925, -2.050, -2.125, -2.200, -2.400,
 -2.425, -2.425, -2.400, -2.275, -2.200, -2.125, -2.025,
 -1.975, -1.900, -1.825}
listsc1 = 10 Log[10,listsc1]
listsc2 = 10 listsc2 / 3.85
listsc = Transpose[{(listsc1),(listsc2)}]
sigmafe1 = Interpolation[listfe]
sigmasc1 = Interpolation[listsc]
sigmafe[x_] := 7.86 10^(-1 + sigmafe1[10 Log[10,
 (x c^2 / (10^6 1.60217733 10^-19 10^7 ))]] / 10)
sigmasc[x_] := 3.67 10^(-1 + sigmasc1[10 Log[10,
 (x c^2 / (10^6 1.60217733 10^-19 10^7 ))]] / 10)
(* absorption coefficient. x is energy
 of incident beam (in mass unit) *)



omega = 10^3 1.275 10^6 1.60217733 10^-19 / (c 10^-2)^2
 (* energy of the gamma ray (converted into mass unit) *)
d1 =6.0
 (* distance between the source and the Fe cylinder *)
d2 =6.2
 (* distance between the Fe cylinder and the scintillator *)
lf =16.2
 (* length of the Fe cylinder *)
ls =6.3
 (* length of the scintillator *)
ll =20.03
 (* length of the lead *)
r1 =4.91
```

```
r2 =5.90
 (* radii of the Fe cylinder *)
rs =2.6
 (* radius of the scintillator *)
rl =3.26
 (* radius of the lead *)
s  = 2.06 / 26
 (* polarization of electron in the Fe cylinder *)
nfe = 26 6.0221367 10^23  7.86 / 55.845
 (* number density of electrons in Fe *)
emax =10^7 546 10^3 1.60217733 10^-19 + m c^2
emin =10^7 100 10^3 1.60217733 10^-19 + m c^2
 (* maximum and minimum of the beta ray energy *)
 (* minvalue(100keV) is threshold energy,need to change *)
thmax = ArcTan[r2 / d1] + ArcTan[(r2 + rs) / d2]
thmin = ArcTan[r1 / (d1 + lf)] + ArcTan[(r1 - rs)
 / (d2 + lf + ls)]
phimax = ArcTan[rs Sqrt[r2^2 + (d1 + lf)^2]
 / ((d1 + d2 + lf ) r1 - rs (d1 + lf))]

test1[z_,r_,th_,phi_] := z Cos[th] + r Sin[th] Cos[phi]
test2[z_,r_,th_,phi_] := r Cos[th] - z Sin[th] Cos[phi]
test3[z_,r_,th_,phi_] := ( ((r^2 + z^2) / test1[z,r,th,phi]^2) - 1 )
 - (rl / (d2 +(lf/2)) )^2
test4[z_,r_,th_,phi_] := (r test2[z,r,th,phi] / test1[z,r,th,phi])
 + (rl / (d2 + (lf/2)) )^2 (d1 + d2 + lf - z)
test5[z_,r_,th_,phi_] := r^2  - (rl / (d2 + (lf / 2)) )^2
 (d1 + d2 + lf - z)^2
test6[z_,r_,th_,phi_] := (d1 + d2 + lf - z)^2
 (((r^2 + z^2) / test1[z,r,th,phi]^2) - 1)
 + 2 r (d1 + d2 + lf - z) test2[z,r,th,phi] / test1[z,r,th,phi] + r^2
test7[z_,r_,th_,phi_] := (d1 + d2 + lf + ls - z)^2
 (((r^2 + z^2) / test1[z,r,th,phi]^2) - 1)
 + 2 r (d1 + d2 + lf + ls - z) test2[z,r,th,phi]
 / test1[z,r,th,phi] + r^2


omega1[th_] := (m omega) / (m + omega (1 - Cos[th]))
 (* energy of scattered photon (converted into mass unit) *)
```

```
fdp[ee_,z_,r_] := -z Sqrt[(1 - (m c^2 / ee)^2) / (r^2 + z^2)]
 (* polarization dependent part of flux *)

rho[ee_] := Sqrt[ee^2 - m^2 c^4] (emax - ee)^2 ee
 (* density of state *)

s1[z_,r_] := (r - r1) Sqrt[r^2 + z^2] / r

s2[z_,r_,th_,phi_] := Sqrt[r^2 + z^2] Abs[r test2[z,r,th,phi]
 + Sqrt[r^2 test2[z,r,th,phi]^2
 - (r^2 - r1^2)(r^2 + z^2 - test1[z,r,th,phi]^2)]]
 / (r^2 + z^2 - test1[z,r,th,phi]^2)

dcsip[th_,phi_] := (re^2 / 2) (omega1[th] / omega)^2
 ( (1 + Cos[th]^2) + ((omega / m) - (omega1[th] / m)) (1 - Cos[th]) )
 (* polarization independent differential cross section *)

dcsdp[z_,r_,th_,phi_] := (re^2 / 2) (omega1[th] / omega)^2
 (1 - Cos[th]) ( ((omega / m) + (omega1[th] / m)) Cos[th]
 + (omega1[th] / m) Sin[th] Cos[phi] r / z )
 / Sqrt[1 + (r/z)^2]
 (* polarization dependent differential cross section *)

epsilon[z_,r_,th_,phi_] /; ( test4[z,r,th,phi]^2
 - test3[z,r,th,phi] test5[z,r,th,phi] >= 0  )
    &&    ( ( ( -test4[z,r,th,phi]
 - Sqrt[test4[z,r,th,phi]^2 - test3[z,r,th,phi] test5[z,r,th,phi]] )
 / test3[z,r,th,phi] ) <= d1 + ((lf + ll) / 2) - z ) := 0
 (* condition : A photon is absorbed by the lead *)

epsilon[z_,r_,th_,phi_] /; ( test6[z,r,th,phi] <= rs^2 )
   &&   ( test7[z,r,th,phi] <= rs^2 )
:= 1 - Exp[ -sigmasc[omega1[th]] ls Sqrt[r^2 + z^2]
 / Abs[test1[z,r,th,phi]]]

epsilon[z_,r_,th_,phi_] /; ( test7[z,r,th,phi] <= rs^2 )
:= 1 - Exp[ -sigmasc[omega1[th]] Sqrt[r^2 + z^2]
 Abs[( (d1+d2+lf+ls-z) / test1[z,r,th,phi])
 + ( r test2[z,r,th,phi] + Sqrt[r^2 test2[z,r,th,phi]^2
 - (r^2 - rs^2) ( (r^2 + z^2) - test1[z,r,th,phi]^2)] )
```

```
 / ( (r^2 + z^2) - test1[z,r,th,phi]^2) ]]

epsilon[z_,r_,th_,phi_] /; ( test6[z,r,th,phi] <= rs^2 )
 := 1 - Exp[ -sigmasc[omega1[th]] Sqrt[r^2 + z^2]
 Abs[( (d1+d2+lf-z) / test1[z,r,th,phi])
 + ( -r test2[z,r,th,phi] + Sqrt[r^2 test2[z,r,th,phi]^2
 - (r^2 - rs^2) ( (r^2 + z^2) - test1[z,r,th,phi])]^2 )
 / ( (r^2 + z^2) - test1[z,r,th,phi])^2 ] ]

epsilon[z_,r_,th_,phi_] /; ( (Sqrt[(r^2 - rs^2)(r^2 + rs^2)] / rs)
 Abs[Sin[th] Sin[phi] / test2[z,r,th,phi]] <= 1 )
  &&  ( Abs[ ((r^2 - rs^2) / r) (test1[z,r,th,phi] / test2[z,r,th,phi])
 - d1 - d2 - lf - (ls/2) + z] <= ls/2 )
 := 1 - Exp[ -sigmasc[omega1[th]] 2 Sqrt[r^2 test2[z,r,th,phi]^2
 - (r^2 - rs^2) ( (r^2 + z^2) -test1[z,r,th,phi]^2)] /
 ( (r^2 + z^2) - test1[z,r,th,phi]^2) ]

epsilon[z_,r_,th_,phi_] := 0
 (* efficiency of detection *)

intgrndip[ee_,z_,r_,th_,phi_] := rho[ee] (r / (2 (r^2 + z^2)))
 Exp[ -sigmafe[omega] s1[z,r]] dcsip[th,phi]
 Exp[ -sigmafe[omega1[th]] s2[z,r,th,phi]]
 epsilon[z,r,th,phi] Sin[th] nfe

intgrnddp[ee_,z_,r_,th_,phi_] := rho[ee]
 (fdp[ee,z,r] r / (2 (r^2 + z^2))) Exp[ -sigmafe[omega] s1[z,r]]
 dcsdp[z,r,th,phi] Exp[ -sigmafe[omega1[th]] s2[z,r,th,phi]]
 epsilon[z,r,th,phi] Sin[th] nfe

nip[ee_] := 2 2 Pi NIntegrate[intgrndip[ee,z,r,th,phi],
 {z,d1,d1 + lf},{r,r1,r2},{th,thmin,thmax},{phi,0,phimax},
 AccuracyGoal ->4,PrecisionGoal ->4,WorkingPrecision ->7]

ndp[ee_] := 2 2 Pi NIntegrate[intgrnddp[ee,z,r,th,phi],
 {z,d1,d1 + lf},{r,r1,r2},{th,thmin,thmax},{phi,0,phimax},
 AccuracyGoal ->4,PrecisionGoal ->4,WorkingPrecision ->7]

asym[ee_] := 1/3 s ndp[ee] / nip[ee]
 (* asymmetry *)
```

```
 (* ip = independent of polarization *)
 (* dp = dependent of polarization *)

voverc[ee_] := Sqrt[1 - (m c^2 / ee)^2]
 (* v/c *)

repeat=10
listvoverc=Table[voverc[emin+(i-.5)(emax-emin)/repeat],{i,1,repeat}]
listasym=Table[asym[emin+(i-.5)(emax-emin)/repeat],{i,1,repeat}]
listtofit=Transpose[{listvoverc,listasym}]
Fit[listtofit,{x},x]
 (* fitting *)
```

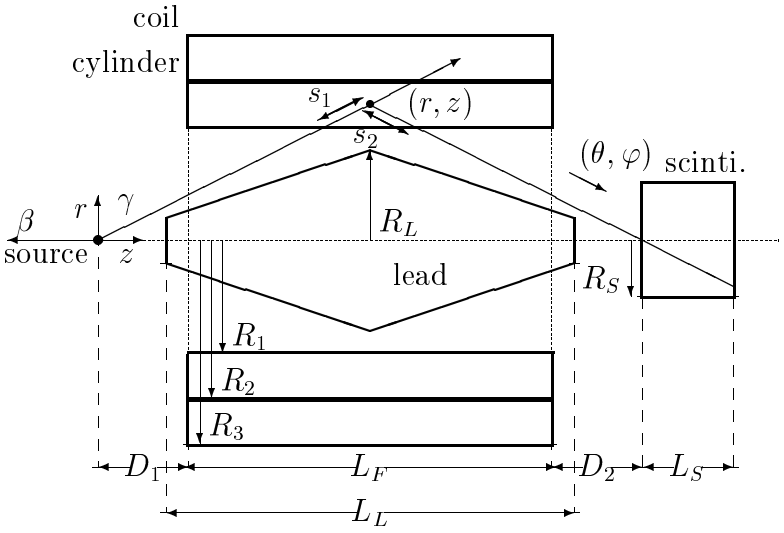
E.4 Result

```
Out[93]= -0.0090767 x
```

結果として $\mathcal{A} = -0.0090767\frac{v}{c}$を得た。

E.5 Cu effect

次に、cylinder の周りに存在する厚さ 1.5cm の Cu 製の coil による Compton 散乱の効果を入れる。



今、Cu の効果を入れると、(E.1) に次の項が加わる。

$$N_{\vec{s}}(E_e) \propto \sum_{p=\pm 1} 2\pi \int_{R_2}^{R_3} r\,dr \int_{D_1}^{D_1+L_{\rm F}} dz \cdot \int_{\theta_{\rm min}}^{\theta_{\rm max}} \sin\theta\,d\theta \int_{-\varphi_{\rm max}}^{\varphi_{\rm max}} d\varphi$$
$$\cdot \frac{W(E_e,z,r)}{4\pi(r^2+z^2)} \cdot e^{-\mu_1^{\rm Fe} s_1^{\rm Fe}} \cdot e^{-\mu_1^{\rm Cu} s_1^{\rm Cu}} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\varphi)$$
$$\cdot e^{-\mu_2^{\rm Cu} s_2^{\rm Cu}} \cdot e^{-\mu_2^{\rm Fe} s_2^{\rm Fe}} \cdot \varepsilon(z,r,\theta,\varphi) \cdot n_{\rm Cu} \quad \text{(E.4)}$$

ここで R_3は cylinder の中心から coil の外側までの半径。$\mu_{1,2}^{\rm Fe,Cu}$はそれぞれ Fe と Cu による γの吸収係数であり、table で近似する。$s_{1,2}^{\rm Fe,Cu}$は、それぞれ入射γ散乱γが Fe,Cu 中を通過した長さであり、(E.1) の $s_{1,2}$にそれぞれ factor $\frac{R_2-R_1}{r-R_1}, \frac{r-R_2}{r-R_1}$をかけて得られる。また $n_{\rm Cu}$は銅原子の数密度である。Cu は磁性体ではないので、(E.2) の p-dep. part は効かない。

以上のことをふまえて、先述の code に変更を加える。新しい parameter の追加と factor の定義。

```
listcu1 = {.01, .015, .02, .03, .04, .05, .06, .08, .10,
 .15, .20, .30, .40, .50, .60, .80, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0, 4.0,
 5.0, 6.0, 8.0, 10.0, 15.0, 20.0, 30.0, 40.0, 50.0, 60.0,
 80.0, 100.0}
listcu2 = {214.0, 73.8, 33.4, 10.8, 4.74, 2.52, 1.56, .757,
 .458, .222, .156, .112, .0939, .0834, .0760, .0658, .0588,
 .0475, .0416, .0356, .0328, .0316, .0309, .0306, .0309,
 .0324, .0341, .0370, .0394, .0412, .0428, .0452, .0470}
listcu = Transpose[{(listcu1),(listcu2)}]
sigmacu1 = Interpolation[listcu]
sigmacu[x_] := 8.96 sigmacu1[x c^2
 / (10^6 1.60217733 10^-19 10^7 )]
(* absorption coefficient. x is energy
 of incident beam (in mass unit) *)

r3 =7.40
 (* radius of the Cu Coil *)

ncu = 29 6.0221367 10^23  8.96 / 63.55
 (* number density of electrons in Cu *)

facfe[r_] := (r2 - r1)/(r - r1)
faccu[r_] := (r  - r2)/(r - r1)
 (* factor for r>r2 *)
```

被積分関数を r と R_2の大小によって定義し直し、r の積分範囲を$\int_{R_1}^{R_3} dr$ とする。

```
intgrndip[ee_,z_,r_,th_,phi_] /; ( r <= r2 ) := rho[ee]
 (r / (2 (r^2 + z^2)))
 Exp[ -sigmafe[omega] s1[z,r]]
 dcsip[th,phi]
 Exp[ -sigmafe[omega1[th]] s2[z,r,th,phi]]
 epsilon[z,r,th,phi] Sin[th] nfe

intgrndip[ee_,z_,r_,th_,phi_] /; ( r > r2 ) := rho[ee]
 (r / (2 (r^2 + z^2)))
 Exp[ -sigmafe[omega] facfe[r] s1[z,r]]
 Exp[ -sigmafe[omega] faccu[r] s1[z,r]]
 dcsip[th,phi]
 Exp[ -sigmafe[omega1[th]] faccu[r] s2[z,r,th,phi]]
 Exp[ -sigmafe[omega1[th]] facfe[r] s2[z,r,th,phi]]
 epsilon[z,r,th,phi] Sin[th] ncu

intgrnddp[ee_,z_,r_,th_,phi_] /; ( r <= r2 ) := rho[ee]
 (fdp[ee,z,r] r / (2 (r^2 + z^2)))
 Exp[ -sigmafe[omega] s1[z,r]]
 dcsdp[z,r,th,phi]
 Exp[ -sigmafe[omega1[th]] s2[z,r,th,phi]]
 epsilon[z,r,th,phi] Sin[th] nfe

intgrnddp[ee_,z_,r_,th_,phi_] /; ( r > r2 ) := 0

nip[ee_] := 2 2 Pi NIntegrate[intgrndip[ee,z,r,th,phi],
 {z,d1,d1 + lf},{r,r1,r3},{th,thmin,thmax},{phi,0,phimax},
 AccuracyGoal ->4,PrecisionGoal ->4,WorkingPrecision ->7]

ndp[ee_] := 2 2 Pi NIntegrate[intgrnddp[ee,z,r,th,phi],
 {z,d1,d1 + lf},{r,r1,r3},{th,thmin,thmax},{phi,0,phimax},
 AccuracyGoal ->4,PrecisionGoal ->4,WorkingPrecision ->7]
```

以上の修正によって、

```
Out[107]= -0.00471712 x
```

すなわち $\mathcal{A} = -0.00471712\frac{v}{c}$を得た。

付 録F　コイルに流す電流値の計算

F.1　Geometry

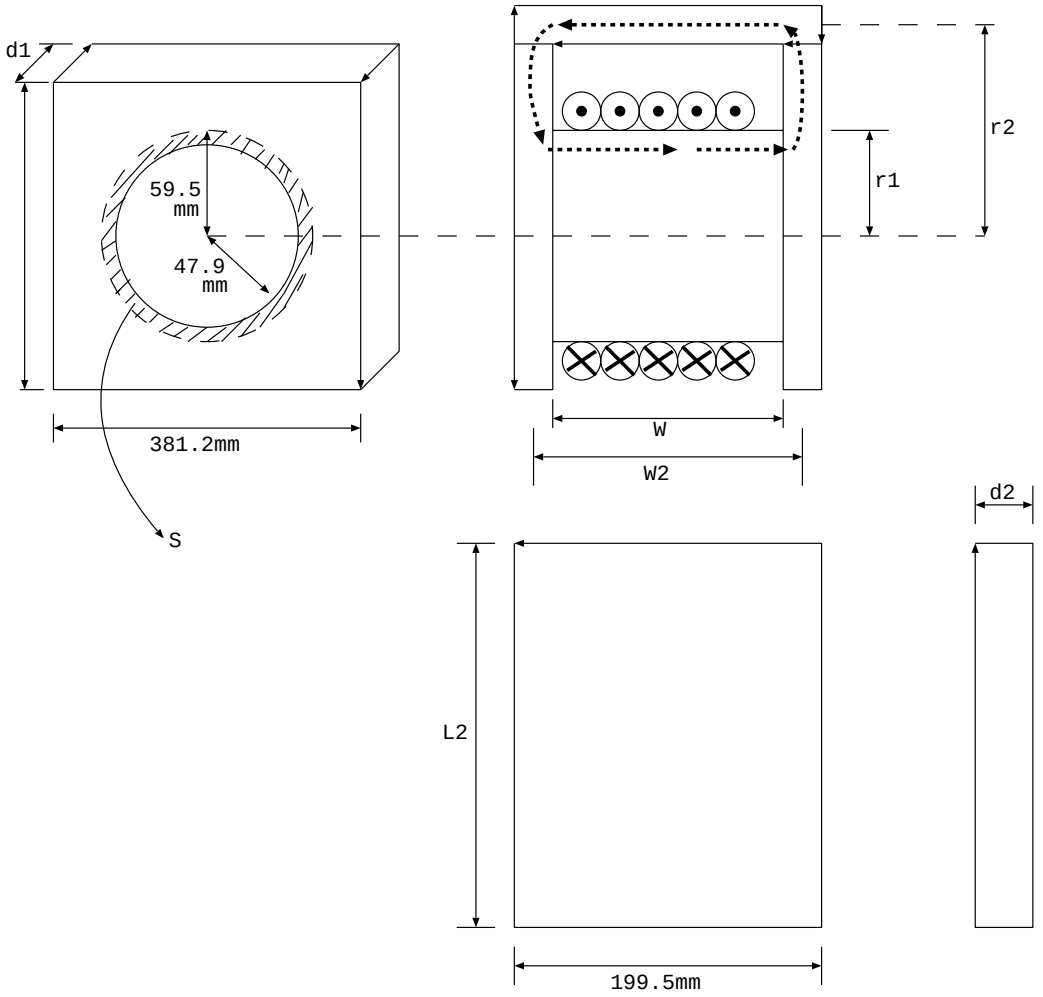


図 F.1: 寸法

N:全巻き数
I:電流値
H:シリンダー内の磁場

$W = 161.8[mm]$
$d = 11.6[mm]$
$r_1 = 53.7[mm]$

B:シリンダー内の磁束密度　　$r_2 = 196.65[mm]$
H_1 : シリンダー垂直鉄板内の磁場　　$d_1 = 19.2[mm]$
B_1 : シリンダー垂直鉄板内の磁束密度　　$W_2 = 199.5[mm]$
H_2 : シリンダー平行鉄板内の磁場　　$d_2 = 12.1[mm]$
B_2 : シリンダー平行鉄板内の磁束密度　　$L_2 = 341/3[mm]$
$S = 3.912 \times 10^{-3}[m^2]$

F.2　計算

Ampére の法則

$$NI = WH + 2\int_{r_1}^{r_2} H_1(r)dr + W_2H_2 \tag{F.1}$$

磁束の保存

$$SB = 2\pi r d_1 B_1(r) = 4d_2L_2B_2 \tag{F.2}$$

B-H 相関　μ_S, μ_Fはそれぞれ SUY, 鉄の透磁率

$$\begin{aligned} B &= \mu_S H \\ B_1 &= \mu_F H_1 \\ B_2 &= \mu_F H_2 \end{aligned} \tag{F.3}$$

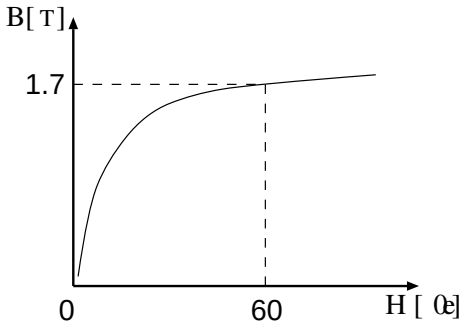


図 F.2: B-H curve(SUY)

SUY の B-H curve より、シリンダーは $H = 60_{[0e]}, B = 1.7_{[T]}$ で飽和する。
式 F.2 より

$$\begin{aligned} B_1(r)r &= \frac{SB}{2\pi d_1} = \frac{3.912 \times 10^{-3}_{[m^2]} \times 1.7_{[T]}}{2\pi \times 19.2 \times 10^{-3}_{[m]}} = 5.516 \times 10^{-2}_{[Tm]} \\ B_2 &= \frac{SB}{4d_2L_2} = \frac{3.912 \times 10^{-3}_{[m^2]} \times 1.7_{[T]}}{4 \times 12.1 \times 10^{-3}_{[m]} \times 341.3 \times 10^{-3}_{[m]}} = 4.026 \times 10^{-1}_{[T]} \end{aligned}$$

側面 (鉄) での透磁率を$\mu_F \simeq \frac{1}{2}\mu_S$と仮定すると、B-H curve は図 F.3 のようになる。

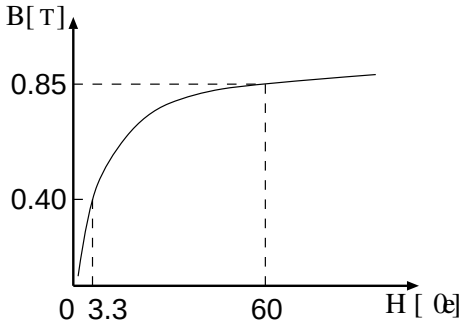


図 F.3: B-H courve(鉄)

これと、$B_1(r) = 5.516 \times 10^{-2}_{[Tm]}/r_{[m]}$から、側面での磁場 H の強さは、図 F.4 のようになる。斜線部の面積を、Mathematica の関数補完機能を使って数値積分すると、$2.717[0\mathrm{e} \cdot m]$ となる。

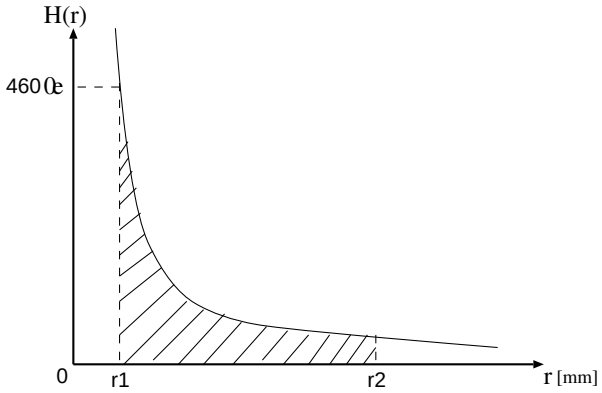


図 F.4: 側面の H

以上より、式 F.1 から

$$\begin{aligned} NI &= 161.8 \times 10^{-3}_{[m]} \times 60_{[0\mathrm{e}]} + 2 \times 2.712_{[0\mathrm{e}\cdot m]} + 199.5 \times 10^{-3}_{[m]} \times 3.3_{[0\mathrm{e}]} \\ &= 9.708_{[0\mathrm{e}\cdot m]} + 5.424_{[0\mathrm{e}\cdot m]} + 0.65835_{[0\mathrm{e}\cdot m]} \\ &\quad (61.5\%) \quad (34.35\%) \quad (4.17\%) \\ &= 15.79035_{[0\mathrm{e}\cdot m]} \\ &= 1257.19_{[A]} (1_{[0\mathrm{e}\cdot m]} = 79.6178_{[A]}) \end{aligned}$$

よって総電流量は

$$NI = 2_{[\text{個 (コイル数)}]} \times 200_{[\text{回 (巻き数)}]} \times 4_{[A(\text{電流})]} = 1600_{[A]}$$

で十分である。

付 録G　Conversion Line

原子核が脱エネルギー反応をする場合、そのエネルギーは大抵γ線の放出という形でなされる。しかし稀に「Internal Conversion」というプロセスを通して行われることもある。このプロセスでは、原子核の励起エネルギーが直接、原子内電子に渡される。励起エネルギーを受け取った電子は、原子の束縛エネルギーぶんだけ目減りした運動エネルギーを持って原子外に飛び出して行く。それゆえ、β 崩壊 とは異なり、この「Internal Conversion」の電子は 単一の運動エネルギーを持つことになる。その際、K 殻の電子が一番放出されやすいが、L 殻、M 殻...の電子も飛び出るのでることが可能なので、これらの line についての重み平均を取った値が、実際観測される Internal Conversion 電子の運動エネルギーである。

Internal Conversion を起こす Source は単一の運動エネルギーを持つβ 線を放出するため、β線とのみ反応する β-counter の Calibration 基準 (Standard) に用いられる。

いくつかの Source について Internal Conversion Line の値を TableG.1 に示す。

Source	Energies[kev]
^{137}Cs	630
^{133}Ba	266、319
^{113}Sn	365
^{207}Bi	480、967、1047

表 G.1: Some internal conversion sources

付 録H　Kurie Plot

これから次の相互作用によるβ-decayについて考える。

$$H_\beta \;=\; C_V(\bar{\psi}_p\gamma_\mu\tau_+\psi n)(\bar{\psi}_e\gamma_\mu\psi\nu_e) \tag{H.1}$$

ただし、τ_+ は、neutronを、protonに変換するisospin operatorである。(厳密には、γ_5 を lepton 部分に含めるべきであるが、考えない。) 単位時間にエネルギー E_eをもったβ-particleが放出される確率$P(E_e)$は、一般に次の式で与えられる。

$$P(E_e)dE_e \;=\; \frac{2\pi}{\hbar}|H_{fi}|^2\frac{dn}{dE_0} \tag{H.2}$$

E_0は終状態のlepton系の全エネルギーであり、dn/dE_0は、状態密度である。遷移行列要素H_{fi}は、

$$H_\beta \;=\; C_V\int d\vec{r}(\psi_p^\dagger\tau_+\psi_n)(\psi_e^\dagger\psi\nu_e) \tag{H.3}$$

となる。ここでは、式(H.1)の$\mu=4$ 成分のみ採用する。
　leptonのwave functionは、単純に、平面波と考えると、

$$\psi_{e\ or\ \nu} \;=\; exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) \tag{H.4}$$

であり、核内では、$kR\ll 1$より、$\psi_{e\ or\ \nu}=1$と考えられる。(体積$V=1$と、ここではしておく。) したがって、

$$H_{fi} \;=\; C_V\int 1 \tag{H.5}$$

が得られる。$\int 1$をFermi核行列要素といい、次の式の省略形である。

$$\int 1 \;=\; \int d\vec{r}\psi_p^\dagger\tau_+\psi_n \tag{H.6}$$

ある粒子が、運動量pから$p+dp$の間をとる場合の状態数dn_lは次のようになる。

$$dn_l \;=\; \frac{4\pi P^2dp}{h^3}(\text{ただし } V=1) \tag{H.7}$$

lepton系の有するエネルギーがE_0からE_0+dE_0の間にあるときの状態数dnは、次のようになる。

$$\frac{dn}{dE_0} \;=\; \frac{dn_edn_\nu}{dE_0}=\frac{16\pi}{h^6}\frac{p_e^2dp_eq^2dq}{dE_0} \tag{H.8}$$

ここで q は放出される neutrno の運動量である。次に electron の運動量をエネルギー変数 E_eに変換すると、

$$p_e^2 dP_e = \frac{1}{c^2} p_e E_e dE_e \tag{H.9}$$

となる。neutrino の運動量 q は、次の関係にある。

$$E_0 = E_e + E_\nu \ ; \ E_\nu = cq \tag{H.10}$$

$dE_e dq$ を $dE_e dE_0$に変数変換すると、jacobian が $1/c$ より、

$$dE_e dq = \frac{1}{c} dE_e dE_0 \tag{H.11}$$

となる。したがって、

$$\frac{dn}{dE_0} = \frac{1}{4\pi^4 \hbar^6 c^5} P_e E_e (E_0 - E_e)^2 dE_e \tag{H.12}$$

となる。したがって、electron(β-線) がエネルギー E_eで放出される確率は、式 (H.2),(H.5),(H.12) より

$$P(E_e)dE_e = \frac{C_V^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^5} \left| \int 1 \right|^2 p_e E_e (E_0 - E_e)^2 dE_e \tag{H.13}$$

が求まる。この式を、β-線の spectrum という。多くの場合、次の単位系を用いる。

$$\begin{aligned} \hbar &= c = m = 1 \\ E &= \frac{E_e}{mc^2} \ , \ p = \frac{p_e}{mc} \ , \ E_0 = \frac{E_0}{mc^2} \end{aligned} \tag{H.14}$$

そして、electron は coulomb 場の効果を受けるので、その効果を含めると、

$$P(E)dE = \frac{G^2}{2\pi^3} \left| \int 1 \right|^2 F(\pm Z, E) pE (E_0 - E)^2 dE \tag{H.15}$$

となる。(ただし $C_V = G\frac{\hbar^3}{m^2 c}$) ここで、$pE(E_0 - E)^2$は、統計的spectrum である。Coulomb 場の影響は、Fermi 関数 F のなかに採り入れられている。

$$F(\pm Z, E) = 2(1+\gamma)(2pR)^{2\gamma - 2} exp(\pm \pi \nu) \frac{|\Gamma(\gamma \pm i\nu)|^2}{\Gamma(2\gamma+1)^2} \tag{H.16}$$

ただし、$\gamma = (1 - \alpha^2 Z^2)^{1/2}$,$\nu = \alpha ZE/p$、R は原子半径である。$\pm$は、$+$が$\beta^-$-decay であり、$-$が$\beta^+$-decay である。

式 (H.13) より次の関係式が導かれる。$P(E_e) \ \propto \ N(ditected \ particles)$

$$\sqrt{\frac{N}{P(E)F(\pm Z, E)E}} \ \propto \ (E_0 - E) \tag{H.17}$$

この線形関係を、実験結果に用いることで、Kurie-Plots が得られる。

付 録I　統計

I.1　最小2乗法

ある物理量 y とその誤差 σの測定を、x の関数として n 点で行なったとする。つまり、(x_i, y_i, σ_i) の観測量の set を n 組 (i=1,...n) 得たとする。
今、これらのデータを以下の関数に fit させたい。

$$y = f(x; a_1, a_2, ..a_m)$$

ここに $a_1, ..., a_m$ は決定すべき 未知 パラメーターである。
この a_j(j=1,...m) の 最良値は

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - f(x_i; a_j)}{\sigma_i} \right)^2$$

を最小にする a_j として与えられる というのが最小 2 乗法の心である。
この 最良値 a_jを求めるためには、次の方程式

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0$$

を解けば良い。続いてその決定した パラメーター の誤差を評価したければ次のような $error \quad matrix, V_{ij}$を作れば良い。

$$(V^{-1})_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial a_j}$$

$matrix \ V_{ij}$の対角成分は a_i の誤差を与え、非対角成分は a_i と a_j の covariance を 与える。
つまり

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov(1,2) & cov(1,3) & .... \\ .... & \sigma_2^2 & cov(2,3) & .... \\ .... & .... & \sigma_3^2 & .... \\ .... & .... & .... & .... \end{pmatrix}$$

となる。
次に本実験の解析で用いた具体例を見ていくことにする。

- $y = ax$ 型
  これは a に関する 1 パラメーター フィット である。

  上の処方箋に従えば

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{\sigma^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}$$

$$\sigma_a = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}}$$

  となる。

I.2 χ^2検定と Confidence Level(CL)

fitting の際、仮定した fit 関数 が実際 の data に どれくらい あっているかという、いわば fit の $quality$ を 数学的に check する手段が必要である。我々はこの手段として χ^2 検定 を用いる。χ^2 検定を行なう手順を示すと、

1. まず、最小 2 乗法の処方箋にしたがって、S の値を最小にする a_j の組と、その時の S の最小値 $\mathrm{S_{min}}$ を求める。
2. fit に用いた 独立した data の数を n 個、fit 関数の中にあるパラメーターの数を m とすると、この χ^2 検定の自由度 ν は ν = n-m で与えられる。
3. この fit の quality を 簡便的に check する方法は 次のように定義される reduced χ^2 の値が 1 に近いかを 確かめれば良い。

$$reduced\ \chi^2 = \frac{\mathrm{S_{min}}}{\nu}$$

4. より厳密に check したければ、自由度 ν の χ^2 分布において、$\mathrm{S_{min}} \leq \chi^2$ なる確率を求めれば良い。これがいわゆる Confidence Level (CL) である。

$$CL(\%) \equiv Prob.(\mathrm{S_{min}} \leq \chi^2)$$

   一般的にいって、この CL が 5 (%) 以上あれば この fit 関数の仮定は正しいと結論される。

I.3 誤差の伝搬

$u = f(x, y)$ は x ,y の関数であり、x ,y はそれぞれ統計誤差σ_x ,σ_yを持つとする。
この時、関数 u 自体の 統計誤差 σ_u は、

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + 2cov(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

となる。
次に本実験で用いた具体例を見てみよう。

- Asymmetry $= \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}$ の場合
  cout 数 N_+ ,N_- が Poisson 分布に従うとすると、$\sigma_{N_+} = \sqrt{N_+}$、$\sigma_{N_-} = \sqrt{N_-}$ となる。
  また、N_+ と N_- の測定が独立に行われるので covariance は 0 になり、結局

$$\sigma_{Asym} = \sqrt{\frac{1 - Asymmetry^2}{N_+ + N_-}}$$

  となる。特に Asymmetry の値が小さい時、$Asymmerty^2 \sim 0$ となるので、

$$\sigma_{Asym} \sim \sqrt{\frac{1}{N_{total}}}$$

  と近似できる。

I.4 同一物理量の測定値が複数ある場合の統計的平均値

同一の物理量を測定した結果が N 個あるとする。

$$a_i \pm \sigma_i \quad (i = 1, 2, ..., N)$$

この時、これらの結果を統計的にまとめると

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

となる。

関連図書

General Reference for Experiments

[1] Energy Dependence of β-(circularly polarized γ)correlations
O.Meling and H.Daniel \ Nuclear Physics A124 \ 320-336 \ (1969)

[2] 1995 年度課題研究 P2 レポート

[3] 1995 年度課題研究 P2 log note

[4] Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments
W.R.Leo \ Springer-Verlag

General Reference for Weak Interaction

[5] ベータ崩壊と弱い相互作用
山田勝美、森田正人、藤田昭彦 \ 培風館

[6] 大学院原子核物理
中村誠太郎、吉川庄一、森田正人、玉垣良三、谷畑勇夫、大塚孝治 \ 講談社

[7] Gauge Theory of Weak Interaction
Greiner,and Muller \ Springer-Verlag

Historical Background on Parity Violation

[8] Question of Parity Conservation in Weak Interactions
T.D.Lee,and C.N.Yang \ Phys.rev.104 \ 254 \ (1956)

[9] Parity Experiments in Beta Decays
C.S.Wu \ Rev.Mod.Phys.31 \ 783 \ (1959)

Theoretical $\beta-\gamma$ Correlation

[10] First-Forbidden Beta Decay
H.A.Weidenmuller \ Rev.Mod.Phys.33 \ 574 \ (1961)

[11] Parity Nonconservation in β decay
K.Alder,B.Stech,and A.Winther \ Phys.Rev.107 \ 728 \ (1957)

Polarization Compton Scaterring

[12] An Introduction to Quantum Field Theory
Peskin,and Schroeder\ Addison-Wesley

[13] Matrix Representation of polarization
W.H.McMaster \ Rev.Mod.Phys.33 \ 8 \ (1961)

Algebra of Angular Momentum

[14] 角運動量の基礎理論
Rose \ みすず書房

[15] 量子力学\ vol2
Mesiah \ 東京図書