

Compton polarimeter による
隠れた変数理論の検証

菊池徹 中村克郎 箱崎雄一郎 林勇治 林優二郎

概要

今回の課題演習では、Bell の不等式による隠れた変数理論の検証実験を行った。概要は以下のとおりである。 ^{22}Na から発生するパラポジトロニウムは二光子崩壊をする。互いに反対方向へ飛ぶ光子をそれぞれ Compton polarimeter に通して、その coincidence rate を測定する。polarimeter の角度を様々に変えて coincidence rate の測定を繰り返すことで Bell の不等式に現れる量を直接に測定することが出来る。今回の実験の目的は、Bell の不等式の検証と、Bell の不等式に現れる $\overline{ab}(\phi)$ という量に対して量子力学が正しい予言をしていることを確認すること、の二点である。

実験の結果、Bell の不等式は一般には成り立たないことが分かった。また、 $\overline{ab}(\phi)$ は量子力学が予言するものにかなり近いものになった。

目次

第 1 章 Introduction	2
第 2 章 理論	4
2.1 パラポジトロニウムの消滅による 2 光子放出	4
2.2 Bell の不等式	5
2.2.1 Bell の不等式の導出	6
2.2.2 Bell の不等式の意味	9
2.3 Compton polarimeter を用いた $\overline{ab}(\phi)$ の測定	12
2.3.1 実験の概要	12
2.3.2 隠れた変数理論に基づく $\overline{ab}(\phi)$ の測定	14
2.3.3 量子力学に基づく $\overline{ab}(\phi)$ の測定	18
第 3 章 実験装置	22
3.1 この装置を用いた Rate の測定	22
3.2 それぞれの scintillator での電子との相互作用、および信号の 見え方	23
3.3 数値計算による散乱角 $\theta = 60^\circ$ としたことの評価	24
3.3.1 散乱角のばらつき	25
3.3.2 セッティングにおいて $\theta = 60^\circ$ とした理由	25
3.3.3 数値計算による各 θ における $k _{EX}$ の値	27
3.3.4 良い θ のセッティング	28
第 4 章 実験結果	31
4.1 Calibration について	31
4.2 Rate 測定の結果	33
第 5 章 結論と考察	38
参考文献	41
謝辞	42

第1章 Introduction

量子力学の大きな特徴は、一般に測定量を確率的にしか予言できない、ということにある。この確率解釈に多くの人々が違和感を覚え、次のように考えた：

「量子力学に確率の概念が現れるのは、まだ我々がミクロの世界について無知であるからだ。測定前でもすでに物理量は一意に定まっていると考えるのが自然だし、そうであれば古典統計力学に対して Newton 力学があるように、ミクロの世界に対してより詳細な理論（隠れた変数理論）が存在して、その理論では測定量は一意的に予言することができるに違いない。量子力学はそのような理論の統計量を扱っているに過ぎない。」

1964年、J.S.Bell は、隠れた変数理論が必ず満たさなければならず、かつ量子力学は一般にはそれを満たさないような不等式（Bell の不等式）を提出した。この不等式の最大の価値は、それが実験的に検証することが出来ることにある。もし実験結果が Bell の不等式を破るようであれば、上述のような思想に基づく隠れた変数理論は存在しないことが実験的に確立される。

Bell の不等式が提出されて以降、多くの検証実験が行われ、結果は Bell の不等式を破るものとなった。つまり、量子力学の確率解釈は本質的なものであり、それは我々の無知の反映ではない。

我々は Compton polarimeter を用いて Bell の不等式の検証実験を行った。本レポートの流れは次のようになっている。

1. 本実験の予備知識として、パラポジトロニウムの崩壊により放出される 2 光子の状態が量子力学でどのように表されるかを見る。
2. Bell の不等式を導き、その基本的な発想を説明する。
3. Bell の不等式を検証するために、そこに現れる $\overline{ab}(\phi)$ という量を測定したいが、これを直接測定するのは難しいので、二つの Compton polarimeter の coincidence rate を経由して $\overline{ab}(\phi)$ を間接的に測定する算段を考える。coincidence rate と $\overline{ab}(\phi)$ を結ぶのは理論であるが、まず隠れた変数理論が両者をどのように結ぶのかを見る。それにより、本実験の第一の目

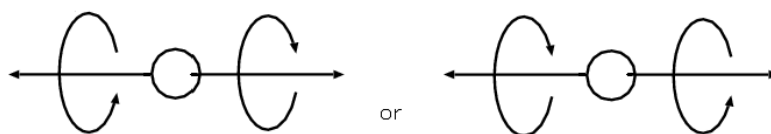
的「Bellの不等式の検証」への理論的準備が完了する。どのような実験結果が出ればBellの不等式が破られるのかも説明する。

4. 量子力学が coincidence rate と $\overline{ab}(\phi)$ をどのように結ぶのかを見る。それにより、本実験の第二の目的「 $\overline{ab}(\phi)$ に対して量子力学が正しい予言をしているか確認すること」への理論的準備が完了する。
5. 今回の実験の詳しい set up を説明する。
6. 実験の結果を提示し、確かに Bell の不等式が破られることと、量子力学が正しい予言をしていることが確認されたことを示す。実験結果に対する考察も行う。

第2章 理論

2.1 パラポジトロニウムの消滅による2光子放出

パラポジトロニウムが消滅する際、そのエネルギーによって2光子が放出される。ここではこのときの2光子の波動関数を考える。



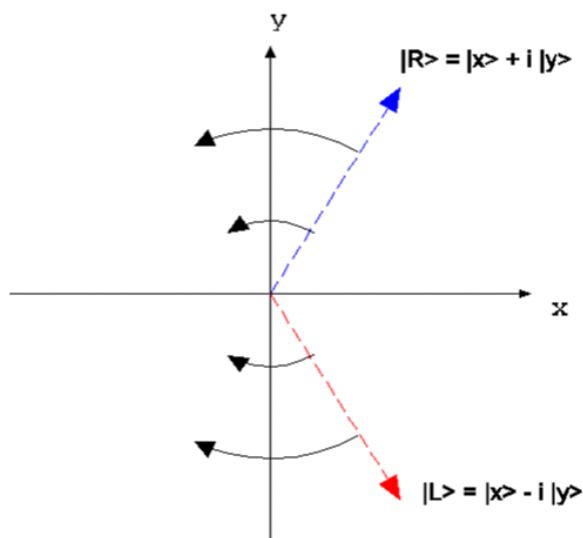
2光子の放出

運動量保存則より2光子は逆方向に飛び、角運動量保存から2光子の円偏光の向きは進行方向に対して同方向となることから、波動関数は

$$|F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R_1\rangle|R_2\rangle + |L_1\rangle|L_2\rangle) \quad \text{or} \quad |F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R_1\rangle|R_2\rangle - |L_1\rangle|L_2\rangle)$$

のように書ける。ただしRは右円偏光、Lは左円偏光状態、添字はそれぞれ光子1と2の状態を表している。

偏極は下図のように、



$$|R_1\rangle = |L_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle), \quad |L_1\rangle = |R_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle)^1$$

と表すことができ、

$$\begin{aligned} |R_1\rangle|R_2\rangle &= \frac{1}{2}(|x\rangle|x\rangle + |y\rangle|y\rangle - i(|x\rangle|y\rangle - |y\rangle|x\rangle)), \\ |L_1\rangle|L_2\rangle &= \frac{1}{2}(|x\rangle|x\rangle + |y\rangle|y\rangle - i(|x\rangle|y\rangle + |y\rangle|x\rangle)) \end{aligned}$$

であることから、さきほどの波動関数はそれぞれ以下ようになる。

$$\begin{aligned} |F\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|R_1\rangle|R_2\rangle + |L_1\rangle|L_2\rangle) & |F\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|R_1\rangle|R_2\rangle - |L_1\rangle|L_2\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle|x\rangle + |y\rangle|y\rangle) & &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(|x\rangle|y\rangle - |y\rangle|x\rangle) \end{aligned}$$

ここで、パラポジトロニウムのパリティは - 1 であることから後者の式の方を採用する。

したがって、パラポジトロニウムの消滅における 2 光子の波動関数は

$$|F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle|y\rangle - |y\rangle|x\rangle)^2$$

となる。

2.2 Bell の不等式

隠れた変数理論とは、「物理量は一意に記述しうる、つまり測定に関係なく物理量は一意に定まっている」という思想を出発点としたあらゆる理論の総称である³。この理論は我々にとって未知のパラメータ、すなわち隠れた変数 (の組) λ によって、物理量を 100 % の精度で (一切の確率解釈を含まずに) 記述する。

隠れた変数 λ というのが分かりにくい概念であるが、前章 Introduction でも述べたように、隠れた変数理論 \longleftrightarrow 量子力学のアナログが Newton 力学 \longleftrightarrow 古典統計力学であることから、次のように考えることができる。今ここに、古典 (平衡) 統計力学は知っているが Newton 力学は知らない人がいるとしよう。その人は、気体中のある特定の分子がどれだけの運動量で運動しているかについては、Boltzmann 分布を用いた確率的な予言しかできない。しかし実際は、十分な量の初期条件さえ集まれば Newton の運動方程式によって分子一つ一つの運動量が時間 t を用いて 100 % の精度で (原理的には) 記述できる。したがって、この場合の隠れた変数は時間 t である。この例のよ

¹ $|x\rangle$ とは x 方向に設置した偏極板を通過し、 x 方向と垂直な y 方向の偏極板は通過しないという光子の偏極の状態を表している。 $|y\rangle$ も同様である。

²係数の $-i$ は、今は絶対値のみ重要なので 1 としても問題ないのである。

³正確に言うと、局所性も仮定する。つまり隠れた変数理論とは局所実在論に基づく極微の世界の記述である。この点については清水明著『量子論の基礎』(サイエンス社)が詳しい。

うに、物理量が測定に関係なく一意に定まっている時、それは独立変数としての隠れた変数 λ の関数である。

さて、隠れた変数理論は量子力学と異なる予言をする。その一例が Bell の不等式である。この不等式は実験的に検証することができる。まず、Bell の不等式の導出を行う。

2.2.1 Bell の不等式の導出

次のような思考実験を考える⁴：図 2.1 のように、ある source から二つの粒

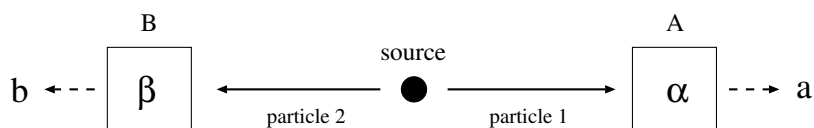


図 2.1: 粒子の持つ物理量から、得点を記録する。

子が反対方向に飛んでいくとする。粒子が飛んでいく方向にはそれぞれ観測者 A と B がいる。A は自分のところに来た粒子 1 の持つ物理量のうち、 α という物理量を測定して、それに対応する得点 a をつける。ただし $|a| \leq 1$ とする。

この得点のつけ方は任意であり、物理量を直接（定数倍して）用いてもよいし、「 $\alpha \geq 0$ なら $a = 1$ 、 $\alpha < 0$ なら $a = -0.4$ 」などと範囲別に対応をつけてもよい。同様にして B は測定する物理量を β にして粒子 2 を測定し、結果に応じて得点 b を記録する。同様に $|b| \leq 1$ とする。

得点の積 ab に着目する。source から次々に粒子対を発射させ、上記のような実験を多数回繰り返す。そして、 ab についての平均 \overline{ab} を算出する。

次に、測定する物理量を α から α' に替えて（ α' に対応する得点を a' とする）以上のような一連の実験を繰り返し、得点の積の平均 $\overline{a'b}$ を算出する。

全く同様にして、測定する物理量の組が (α, β') の時 $\overline{ab'}$ を、 (α', β') の時 $\overline{a'b'}$ を算出する。

そして最終的に、次の量を算出する。これは純粋な実験データであり、何の理論に基づくものでもない：

$$C := \overline{ab} + \overline{a'b} + \overline{ab'} - \overline{a'b'} \quad (2.1)$$

⁴話をわかりやすくするため、また、隠れた変数理論の考え方と量子力学の考え方との対比を鮮明にするために、この思考実験には Bell の不等式を導くためだけに必要な設定もしてある。

ここまでが思考実験の説明である。これから、隠れた変数理論に基づいてこの C の値を予言しようとする時、 C がある不等式を満たさなければならないことを示す。それが Bell の不等式である。以下の議論は、ある人がなにか隠れた変数理論の有力な候補となる理論を考え付いたとして、その理論を用いて C を求める段取りを説明しているものと考えたとわかりやすいかもしれない。

隠れた変数理論によると、粒子 1 は source より放出された時から、一意的に定まった物理量を持っていて、それは隠れた変数 λ で記述される。source から観測者 A にたどり着くまでに粒子 1 は自律的に時間発展したり外界から様々な影響を受けたりするかもしれないが、なんにせよ隠れた変数で支配されたまま A によって観測を受ける。A にたどり着いた時、粒子 1 を支配する隠れた変数 $\lambda^{(A)}$ が $\lambda^{(A)} = \lambda_0^{(A)}$ であったとすると、 α は $\alpha(\lambda_0^{(A)})$ と表される。 a は α の値に対応しているから a も $\lambda_0^{(A)}$ の関数であり $a(\lambda_0^{(A)})$ と表される。正確に書くと $a(\lambda^{(A)})_{|\lambda^{(A)}=\lambda_0^{(A)}}$ である。得点 b に関して、粒子 2 を支配する隠れた変数 $\lambda^{(B)}$ によって同様に $b(\lambda_0^{(B)})$ と表される。

便宜上、 $a(\lambda_0^{(A)})$ を $a(\lambda_0^{(A)}, \lambda_0^{(B)})$ と考え、さらにこれを $a(\lambda_0)$ とまとめて書く。これは、例えば関数 $f(x) := x^2 + x$ を y の関数でもないのに $f(x, y) = x^2 + x$ と表し、さらに $f(x) = x^2 + x$ とまとめて書くのと同じである。同様に b も $b(\lambda_0)$ と書く。

観測者 A、B が source から次々に放出される粒子対を観測した時、 λ_0 は様々な値をとる。その規格化された分布を $\rho(\lambda_0)$ とする。もちろん $0 \leq \rho(\lambda_0) \leq 1$ である。

すると \overline{ab} は

$$\overline{ab} = \int a(\lambda)b(\lambda)\rho(\lambda) \quad (2.2)$$

と求められる。

$\overline{a'b}$ など同様に与えられるから、結局 C は

$$C = \int \{a(\lambda)b(\lambda) + a'(\lambda)b(\lambda) + a(\lambda)b'(\lambda) - a'(\lambda)b'(\lambda)\} \rho(\lambda) d\lambda \quad (2.3)$$

と与えられる。ここで $\{$ の中身の絶対値は、 $|a| \leq 1$ などから、次のような不等式を満たすことが分かる。

$$\begin{aligned} |ab + a'b + ab' - a'b'| &= |(a + a')b + (a - a')b'| \\ &\leq |a + a'||b| + |a - a'||b'| \\ &\leq |a + a'| + |a - a'| \\ &= \pm 2a \text{ or } \pm 2a' \\ &\leq 2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

絶対値が 2 以下の量の平均の絶対値も、2 以下である。式で表すと、

$$\begin{aligned} |C| &\leq \int |a(\lambda)b(\lambda) + a'(\lambda)b(\lambda) + a(\lambda)b'(\lambda) - a'(\lambda)b'(\lambda)|\rho(\lambda)d\lambda \\ &\leq 2 \int \rho(\lambda)d\lambda \\ &= 2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

すなわち、

$$|\overline{ab} + \overline{a'b} + \overline{ab'} - \overline{a'b'}| \leq 2. \quad (2.6)$$

これが Bell の不等式である⁵。

今後のために式 2.6 を書き直す。A が得る点 a は測定する物理量 α の関数だと見ると、 $a = a(\alpha, \lambda)$ と表せる。同様に $a' = a(\alpha', \lambda)$ などと表せる。すると式 2.6 は

$$|\overline{ab}(\alpha, \beta) + \overline{ab}(\alpha', \beta) + \overline{ab}(\alpha, \beta') - \overline{ab}(\alpha', \beta')| \leq 2 \quad (2.7)$$

と書き直せる。さらに、 α と β の次元が同じで、 $\overline{ab}(\alpha, \beta)$ が差 $\beta - \alpha$ のみに依存するような場合、 $\phi_1 := \beta - \alpha$ 、 $\phi_2 := \beta - \alpha'$ 、 $\phi_3 := \beta' - \alpha$ とすると式 2.7 は

$$|\overline{ab}(\phi_1) + \overline{ab}(\phi_2) + \overline{ab}(\phi_3) - \overline{ab}(-\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)| \leq 2 \quad (2.8)$$

となる。今後はこの式を用いる。

Bell の不等式の導出がすんだところで、次に量子力学がこの不等式を破ることがあることを示そう。

前に述べたように、量子力学ではパラポジトロニウムから正反対方向に放出される 2 光子⁶の偏極は、次の状態ベクトル $|F\rangle$ で表される。

$$|F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle|y\rangle - |y\rangle|x\rangle) \quad (2.9)$$

ここで、例えば $|x\rangle|y\rangle$ は「光子 1 は x 方向に偏極 (x 偏極と呼ぶ) しているか？」という測定をすれば必ず「yes」という結果が出て、かつ「光子 2 は y 偏極であるか？」をという測定すれば必ず「yes」という結果が出るような状態を表す。 xy 軸を角度 ϕ だけ回転させてできた軸を $x'y'$ 軸とすると、上式は

$$|F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \phi |x\rangle|x'\rangle + \cos \phi |x\rangle|y'\rangle - \cos \phi |y\rangle|x'\rangle + \sin \phi |y\rangle|y'\rangle) \quad (2.10)$$

と変形される。図 2.2 のように観測者 A は偏極板を x 方向に設置して、観測

⁵“Bell の不等式”と呼ばれるものには様々な種類があり、式 2.6 より一歩強い $|\overline{ab} + \overline{a'b}| + |\overline{ab'} - \overline{a'b'}| \leq 2$ というものもある。式 2.4 からわかるように、これも同様に導出できるが、式 2.6 のほうが簡明なので今回はこれを採用した。今回の実験にはこれで十分である。

⁶光子の存在は、例えば光電効果の実験などにより、隠れた変数理論や量子力学の立場と無関係に、既知のものとする。今回の実験の目的は、「隠れた変数理論は存在するか」ということであり、そのような理論は量子力学における確率解釈とは相容れないが、量子力学の教科書に書いてあるような事柄すべてと相容れないものではない。光子の存在は(原子の存在と同様に)確率解釈を必要条件とするものではないので、実験事実として認めてしまっても隠れた変数理論において内部矛盾をきたさない。

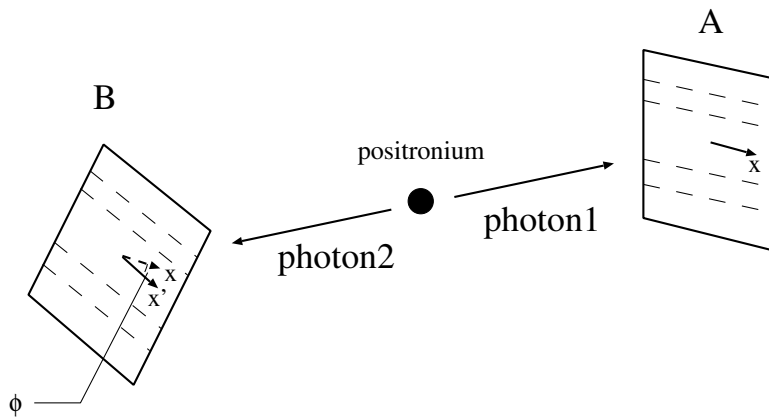


図 2.2: 反対方向に飛ばされる光子を偏極板に通す

者 B は偏極板を x' 方向に設置する。つまり観測者 A、B は偏極板を角度 ϕ ずらして設置する。ここで次のように得点をつける。

「光子 1 が偏極板を通過したら $a = 1$ 、通過しなかったら $a = -1$ 。
同様に、光子 2 が偏極板を通過したら $b = 1$ 、通過しなかったら $b = -1$ 。」

(2.11)

すると式 2.10 より \overline{ab} は

$$\begin{aligned}\overline{ab}(\phi) &= \frac{1}{2}(\sin^2 \phi - \cos^2 \phi - \cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \\ &= -\cos 2\phi\end{aligned}\tag{2.12}$$

となる。よって Bell の不等式の左辺は

$$|\cos 2\phi_1 + \cos 2\phi_2 + \cos 2\phi_3 - \cos 2(-\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)|\tag{2.13}$$

となるが、これの最大値は例えば $\phi_1 = \pi/8$ 、 $\phi_2 = -\pi/8$ 、 $\phi_3 = -\pi/8$ のとき与えられ、 $2\sqrt{2}$ である。したがって量子力学は Bell の不等式を破る。

2.2.2 Bell の不等式の意味

ここでは、Bell の不等式に関してなぜ隠れた変数理論と量子力学が異なる結果を与えたかを「データの構成」という観点から考察することによって、Bell の不等式の意味を考えていこうと思う。話を具体的にするために、先のパラポジトロニウムから放出された光子対の測定を取り上げる。

a 、 b などの記録をとり、 \overline{ab} などと平均を取り、それを $\overline{ab} + \overline{a'b} + \overline{ab'} - \overline{a'b'}$ のように足したり引いたりする、といった作業自身は同じなのに、なぜその結果が隠れた変数理論と量子力学では異なるのか。それは、データの構成が違うからである。Bellの不等式の導出において中心的な役割を果たしているのは式2.4である。当たり前のことであるが、この式の $ab + a'b + ab' - a'b'$ において、第一項目の a と第三項目の a は同じ数値でなければならないし、第一項目の b と第二項目の b も同じ数値でなければならない。 a' 、 b' についても同様である。しかし、ここで測定記録が記されたノートを見返してみよう。このノートには、例えば次のように生のデータが記録されている。

	$a b$	$a' b$	$a b'$	$a' b'$
一回目	1 -1	-1 1	-1 1	-1 1
二回目	1 1	1 -1	1 -1	-1 -1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N回目	-1 1	1 1	-1 -1	1 -1

ただし、 N は十分に大きな数である。表の、 ϕ_1 、 ϕ_2 、 ϕ_3 、 $-\phi_1 + \phi_2 + \phi_3$ は、それぞれ観測者AとBの偏極板の角度を ϕ_1 、 ϕ_2 、 ϕ_3 、 $-\phi_1 + \phi_2 + \phi_3$ ずらした場合の記録である。ここで、 ϕ_1 における一回目の a と ϕ_2 における一回目の a は異なっている。これは、隠れた変数理論的に言えば、 ϕ_1 の a と ϕ_2 の a は、観測された瞬間の $\lambda^{(A)}$ の値 $\lambda_0^{(A)}$ が異なっていたためである。 $\lambda_0^{(A)}$ が同じであったならば両者の a の値は同じになったはずである。このように、第 n 回目のデータとして ϕ_1 の a と ϕ_2 の a は同じであるとは限らないし、 ϕ_1 の b と ϕ_2 の b が同じであるとも限らない。 a' 、 b' についても同様である。各行ごとに式2.4のような計算ができるためには、 ϕ_1 、 ϕ_2 、 ϕ_3 それぞれについてデータを行に関して適当に並べ替えて、各行に現れる a の値は全て同じ、各行に現れる b の値は全て同じ、等等としなければならない(このような並べ替えを、「並べ替え」と呼ぶことにする)。式2.3が主張していることは、そのような並べ替えが可能だ、ということである。第 n 回目の ϕ_1 、 ϕ_2 、 ϕ_3 における λ_0 は一般に異なっているが、実験を多数回行えば全体としては同じ分布 $\rho(\lambda)$ に従ってくれるに違いないから、上記のような並べ替えができると言っている。隠れた変数 λ の存在が、得られるべきデータの構成について強い制限を課しているのである。

一方、量子力学では並べ替えができない場合がある。今考えているパラポジトロニウムから放出された光子対の例では、 $\phi_1 = \pi/8$ 、 $\phi_2 = -\pi/8$ 、 $\phi_3 = -\pi/8$ の時Bellの不等式が破られた。次の表はこのように偏極板の角度を設置した時に量子力学が予言するデータの構成を表している。見やすいよ

うにデータはある程度すでに並べ替えられている。

	$a b$	$a' b$	$a b'$	$a' b'$	
$\frac{1}{2} \sin^2(\frac{\pi}{8})$	1 1	1 1	1 1	1 1	$\frac{1}{2} \sin^2(\frac{3\pi}{8})$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
	1 1	1 1	1 1	\vdots	
$\frac{1}{2} \cos^2(\frac{\pi}{8})$	1 -1	1 -1	1 -1	\vdots	$\frac{1}{2} \cos^2(\frac{3\pi}{8})$
	\vdots	\vdots	\vdots	1 1	
	\vdots	\vdots	\vdots	1 -1	
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
	1 -1	1 -1	1 -1	1 -1	
$\frac{1}{2} \cos^2(\frac{\pi}{8})$	-1 1	-1 1	-1 1	-1 1	$\frac{1}{2} \cos^2(\frac{3\pi}{8})$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
	\vdots	\vdots	\vdots	-1 1	
	\vdots	\vdots	\vdots	-1 -1	
	-1 1	-1 1	-1 1	\vdots	
$\frac{1}{2} \sin^2(\frac{\pi}{8})$	-1 -1	-1 -1	-1 -1	\vdots	$\frac{1}{2} \sin^2(\frac{3\pi}{8})$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
	-1 -1	-1 -1	-1 -1	-1 -1	

表の横の $\frac{1}{2} \sin^2(\frac{\pi}{8})$ などは、その区間のデータ数の全体の数 (N 個) に占める割合である。 \vdots の部分は、その上と下の数値と同じ数値が並んでいることを表す。まず の並びを固定し、 σ_2 、 σ_3 、 σ_4 を施す。並べ替え ができるためには、次のような条件を満たす σ_2 、 σ_3 、 σ_4 が存在しなければならない。

- σ_2 : 各行で と同じ b を与える。
- σ_3 : 各行で と同じ a を与える。
- σ_4 : 各行で σ_2 () と同じ a' 、 σ_3 () と同じ b' を与える。

ここで例えば σ_2 () は上の表の に置換 σ_2 を施した後の並びを表す。

式 2.8 の左辺が $2\sqrt{2}$ になることからこのような置換が存在しないことは明らかだが、異なった方法でもこのような置換が存在しないことを示すことができる (証明は省く)。

並べ替え ができないような時、" $ab+a'b+ab'-a'b'$ " の値は例えば $1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -4$ や、 $(-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) = -4$

になり、絶対値は2をこえている。これは式 2.4 に比べて対照的な結果であり、このような部分の影響により Bell の不等式が破られたのである。

このような説明から、 $\sin^2(\phi_1) = \sin^2(\phi_2) = \sin^2(\phi_3) = \sin^2(-\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)$ の時は量子力学でも Bell の不等式は破られないことが予想されるが、実際このとき式 2.13 は $|2 \cos 2\phi_1|$ となるので Bell の不等式は満たされる。

2.3 Compton polarimeter を用いた $\overline{ab}(\phi)$ の測定

2.3.1 実験の概要

Bell の不等式を検証するための実験の段取りを考える。測定の対象は、今まで話してきた、パラポジトロニウムの崩壊によって放出される二つの光子の偏極である。得点のつけ方は 2.11 と同じである。しかし、パラポジトロニウムから生まれる光子ほどのエネルギー (511keV) 領域の光子に対する偏極板はまだ開発されていないので、直接に偏極を測ることはできない。したがって、直接に $\overline{ab}(\phi)$ を測定して Bell の不等式を検証することはできない。そこで、以下に述べるような Compton polarimeter を使った間接的な測定を考える。

Compton polarimeter⁷とは図 2.3 のようなものである。光子の検出器 (detector) を xz 平面内、 z 軸負の向きと角 θ をなすよう設置する。この角度 θ は本実験を通して常に固定された定数である。具体的には、 $\theta = \pi/3$ として実験した。 x 軸と角度 ψ をなす図のベクトル e 方向の偏極を持った光子 (量子力学的に言えば、状態 $|e\rangle$ の状態にある光子) が z 軸正の方向からやってきて、図の原点にある散乱体で Compton 散乱する。detector 方向に散乱する確率は次の Klein-Nishina の微分断面積に比例する。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \psi) = \frac{1}{2}r_e^2 \left(\frac{q}{q_0}\right)^2 (\gamma - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi) \quad (2.14)$$

ここで r_e は電子の古典半径、 q_0 、 q はそれぞれ入射光子、散乱光子の波数、 $\gamma := q/q_0 + q_0/q$ である。ポジトロニウムから放出された光子に対しては $q = 1/(2 - \cos \theta)$ である。この式は本来は場の量子論から求められたものであるが、今回は実験則として得られた公式であるとする⁸。

detector 方向に散乱する確率が入射光子の偏極に依存するということは逆に、detector に光子が検出された (光子が detector の方向に散乱された) と

⁷Compton 散乱や Compton polarimeter の完全な理解には場の量子論の知識が必要であるが、筆者にその方面の知識が全く無いため、以下の記述には不正確な部分がある可能性があることを断っておくとともに、お詫びいたします。

⁸偏光板を通過した光子ビームが降り注ぐ Compton-scattering target の周りを無数の光子検出器で包囲すればよい。

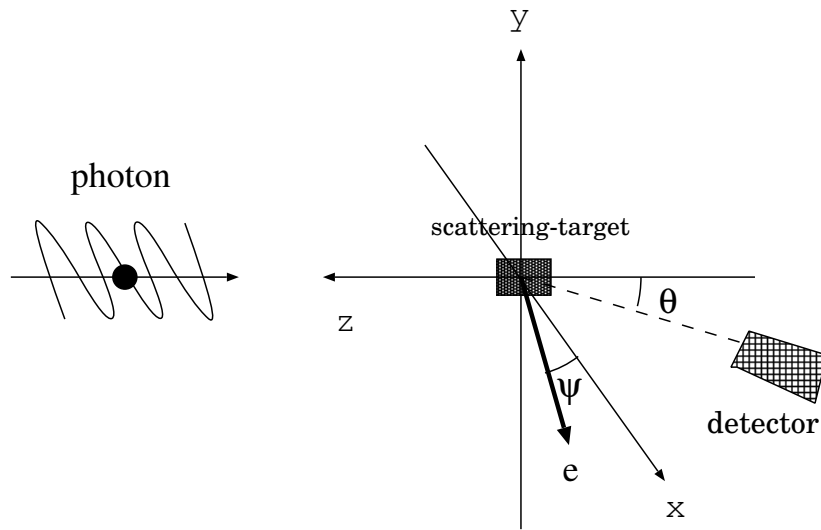


図 2.3: Compton polarimeter

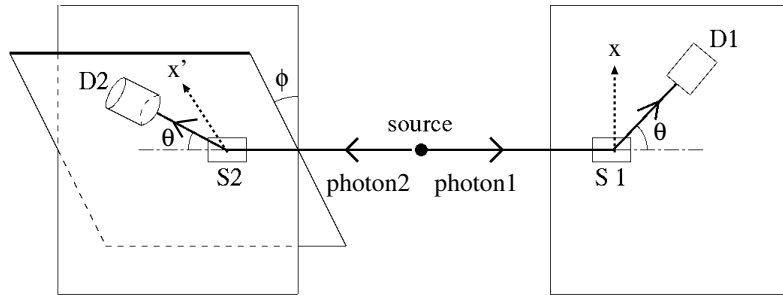
いうデータは、入射光子の偏極について統計的なデータを与えることになる。つまり、一回一回の測定では入射光子の偏極を完全に測定することはできないが、実験を多数回行えば、入射光子の偏極に関して統計的なデータが得られることになる。これが Compton polarimeter である。

さて準備が整ったところで、今回の実験の概要を説明する。Compton polarimeter を二つ用意して、図 2.4 のようにセッティングする。図で、 x 軸と x' 軸は、Compton 散乱体と detector を結ぶ直線および光子の進行方向がなす平面内にあり、光子の進行方向と垂直である。source からは、パラポジトリウム崩壊によって光子が反対方向に飛ばされる。このような崩壊が次々に起こって、次々に光子が反対方向に飛ばされるのだが、まれに反対方向に飛んだ光子の両方が Compton-scattering target に向かいそこで散乱され、さらに両方とも detector の方向に散乱されそこで検出される、といったイベントが起こる。これを coincidence と呼ぶ。

今回の実験ではこの coincidence が単位時間にどれだけ起こるかを、つまり coincidence rate を測定した。 x 軸と x' 軸のなす角を ϕ とすると、coincidence rate (Rate と表す) は次の式で与えられる。

$$Rate(\phi) = g \cdot P(\phi) \quad (2.15)$$

ここで g は、「source から単位時間あたりに Compton-scattering target_{1,2} 方向に放出される光子対の数」、「光子 1, 2 が共に detector 方向に Compton 散乱されたとして、それを detector_{1,2} が共に検出する確率」などの積であり、



S1, S2 : Compton-scattering targets
D1, D2 : detectors

図 2.4: 実験の概念図

これは ϕ によらない。また、 $P(\phi)$ は、「Compton-scattering target に向かった光子 1, 2 が共に detector 方向に Compton 散乱される平均的な確率」を表して、この量のみが ϕ に依存する。 $P(\phi)$ と $\overline{ab}(\phi)$ とを結ぶのは理論であり、その理論により間接的に $\overline{ab}(\phi)$ が測定できる。そこで以下では、隠れた変数理論と量子力学それぞれに基づいた $\overline{ab}(\phi)$ の測定を説明する。

2.3.2 隠れた変数理論に基づく $\overline{ab}(\phi)$ の測定

隠れた変数理論では光子の偏光は測定する前からすでに一意的に確定している。ここで次の重要な仮定をおく：

パラポジトロニウムから放出される光子は、全て偏極（直線偏光）している。

このような仮定をおいたのは、楕円偏光している光子の散乱をどのように扱えばよいか（Klein-Nishina の式に相当するものがどのようなものなのか）を筆者がわからないという消極的な理由による⁹。

以上の仮定により、パラポジトロニウムから放出された光子は、それぞれ $\psi_1(\lambda)$ 、 $\psi_2(\lambda)$ という偏極を持つことになる。ただし、 $\psi_1(\lambda)$ は光子 1 の偏極方向と x 軸のなす角、 $\psi_2(\lambda)$ は光子 2 の偏極方向と x' 軸のなす角である。ここで ψ_1 と ψ_2 を支配する λ はそれぞれ $\lambda^{(A)}$ 、 $\lambda^{(B)}$ と一般に異なるが、前もそうしたように $\psi(\lambda^{(A)}) = \psi(\lambda^{(A)}, \lambda^{(B)}) = \psi(\lambda)$ とし、同一の変数 λ で記述されたと考える。

さて、少し Compton polarimeter を離れて、理想的な偏極板を使った得点のつけ方 2.11 について考えよう。511keV より低いエネルギー領域の光子に

⁹なお、将来的にポジトロニウムから放出された光子に対しても有効な偏光板が開発されたとして、放出された光子を例えば右円偏光板に通すと 1/2 の確率で透過するという実験結果が出るはずである。透過した光子はもちろん右円偏光である。これは、最初直線偏光していた光子が右円偏光板と相互作用して、そのうち 1/2 の割合の光子が右円偏光になった、と解釈できるので、直ちに上記の仮定を反証するものではない。

対して、以下の事実が確認されている。

「 ψ 方向に偏極している光子（量子力学的に言えば、 $|\psi\rangle$ の状態にある光子）は、 x 方向（ $\psi = 0$ ）に設置されている偏極板を、 $\cos^2 \psi$ の確率で通過する。」

(2.16)

将来的に科学技術がより発展して、511keV ほどのエネルギー領域の光子に対する偏極板が開発されたとしても、このような実験結果が得られるはずである。ここで、「 $\cos^2 \psi$ の確率で通過する」というところで、量子力学の確率解釈が成り立っているように見える。しかし隠れた変数理論の立場では、これは我々の無知の反映である。同じ偏極 ψ を与えるような隠れた変数 λ は一つではなく、複数存在する。これら異なる λ に応じて光子は偏極板を通過したり通過しなかったりするので、 λ を知らない我々には確率解釈が入り込んでくるように見えるだけである。

さて、理想的な偏極板を持っていない我々が、2.11 のようにして得られる $\overline{ab}(\phi)$ を Compton polarimeter を用いて算出するにはどのようにしたらいいのだろうか。

そのためにまず *Rate* の表式を考えよう。光子 1 の Compton 散乱と、光子 2 の Compton 散乱は独立だから、「Compton-scattering target に向かった光子 1, 2 が共に detector 方向に Compton 散乱される確率」は Compton 散乱の微分断面積により以下のように表される。

$$h \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \psi_1(\lambda)) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \psi_2(\lambda)) \quad (2.17)$$

ここで h は Compton 散乱体の密度や厚みに依存する定数である。これは特定の偏極 $\psi_1(\lambda)$ 、 $\psi_2(\lambda)$ を持つ光子 1,2 についてのもので、 $P(\phi)$ はこれを、 λ について平均したものである。

$$P(\phi) = h \int \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \psi_1(\lambda)) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \psi_2(\lambda)) \rho(\lambda) d\lambda \quad (2.18)$$

被積分関数について、次のような変形が可能である。

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \psi_1) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \psi_2) &= \left(\cos^2 \psi_1 \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, 0) + \sin^2 \psi_1 \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \frac{\pi}{2}) \right) \\ &\quad \times \left(\cos^2 \psi_2 \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, 0) + \sin^2 \psi_2 \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \frac{\pi}{2}) \right) \\ &= \cos^2 \psi_1 \cos^2 \psi_2 \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, 0) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, 0) \\ &\quad + \cos^2 \psi_1 \sin^2 \psi_2 \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, 0) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \frac{\pi}{2}) \\ &\quad + \sin^2 \psi_1 \cos^2 \psi_2 \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \frac{\pi}{2}) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, 0) \\ &\quad + \sin^2 \psi_1 \sin^2 \psi_2 \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \frac{\pi}{2}) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \frac{\pi}{2}) \quad (2.19) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
d_{x,x'}(\phi) &:= \int \cos^2 \psi_1(\lambda) \cos^2 \psi_2(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda \\
d_{x,y'}(\phi) &:= \int \cos^2 \psi_1(\lambda) \sin^2 \psi_2(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda \\
d_{y,x'}(\phi) &:= \int \sin^2 \psi_1(\lambda) \cos^2 \psi_2(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda \\
d_{y,y'}(\phi) &:= \int \sin^2 \psi_1(\lambda) \sin^2 \psi_2(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda
\end{aligned} \tag{2.20}$$

という量を定義する。これらの量の ϕ 依存性は、 $\psi_1 = 0$ 、 $\psi_2 = 0$ の方向が ϕ ずれていることに起因する。これを用いると、式 2.18 と式 2.19 より、 $Rate(\phi)$ は

$$\begin{aligned}
Rate(\phi) = gh \left\{ d_{x,x'} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, 0) \right)^2 + (d_{x,y'} + d_{y,x'}) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, 0) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \frac{\pi}{2}) \right. \\
\left. + d_{y,y'} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \frac{\pi}{2}) \right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

となる。よって $\overline{ab}(\phi)$ を $Rate(\phi)$ の測定によって知るには、 $d_{x,x'}$ などが $\overline{ab}(\phi)$ で表されればよい。ここで、2.16 より

$$\begin{aligned}
\overline{ab}(\phi) &= \int \{ \cos^2 \psi_1(\lambda) \cos^2 \psi_2(\lambda) - \cos^2 \psi_1(\lambda) \sin^2 \psi_2(\lambda) \\
&\quad - \sin^2 \psi_1(\lambda) \cos^2 \psi_2(\lambda) + \sin^2 \psi_1(\lambda) \sin^2 \psi_2(\lambda) \} \rho(\lambda) d\lambda \\
&= d_{x,x'} - d_{x,y'} - d_{y,x'} + d_{y,y'}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

とできる。また、

$$d_{x,x'} + d_{x,y'} = \int \cos^2 \psi_1(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda \tag{2.23}$$

となるが、空間に特別な方向が無いとすると、 ψ_1 の各値を与える λ の重みは等しいから、

$$\begin{aligned}
d_{x,x'} + d_{x,y'} &= \int \cos^2 \psi_1(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda \\
&= \int_0^\pi \cos^2 \psi_1 \frac{1}{\pi} d\psi_1 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

となる。同様に

$$\begin{aligned}
d_{y,x'} + d_{y,y'} &= \frac{1}{2} \\
d_{x,x'} + d_{y,x'} &= \frac{1}{2} \\
d_{x,y'} + d_{y,y'} &= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

となる。これらより

$$\begin{aligned} d_{x,x'} = d_{y,y'} &= \frac{1}{4}(1 + \overline{ab}(\phi)) \\ d_{x,y'} = d_{y,x'} &= \frac{1}{4}(1 - \overline{ab}(\phi)) \end{aligned} \quad (2.26)$$

となる。よって式 2.21 から $Rate$ は

$$Rate(\phi) = c \left\{ 1 + \left(\frac{\sin^2 \theta}{\gamma - \sin^2 \theta} \right)^2 \overline{ab}(\phi) \right\} \quad (2.27)$$

となる。ただしここで

$$c := gh \left\{ \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{q}{q_0} \right)^2 \right\}^2 (\gamma - \sin^2 \theta)^2 \quad (2.28)$$

であり、これは ϕ によらない量である。

$\theta = \pi/3$ を代入して、 $Rate(\phi)$ を測定すれば、 c と $\overline{ab}(\phi)$ が求まる。実際には有限個の ϕ での $Rate$ の測定しかできないので、

$$\overline{ab}(\phi) = -k \cos 2\phi \quad (2.29)$$

として、fitting により c と k の値を定める。式 2.29 は量子力学の予言する関数形である式 2.12 を強く意識した設定だが、fitting の精度さえ良ければ、式 2.29 は隠れた変数理論に基づいた $\overline{ab}(\phi)$ の測定結果とみなせ、量子力学とは無関係である。

式 2.13 の最大値が $2\sqrt{2}$ であったことから、 $|k| > 1/\sqrt{2}$ という測定結果が出たら、Bell の不等式が否定されることになる。

補足：Bell の不等式の意義について

量子力学の表式

$$|F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle|y\rangle - |y\rangle|x\rangle)$$

を念頭において、隠れた変数理論において次のような仮定を立ててみる。

パラポジトロニウムの崩壊により放出される 2 光子の偏極は互いに垂直である。
(2.30)

もしこのような仮定があると、

$$\begin{aligned} \overline{ab}(\phi) &= \int_0^\pi \left\{ \cos^2 \psi_1 \cos^2 \left(\psi_1 + \frac{\pi}{2} - \phi \right) - \cos^2 \psi_1 \sin^2 \left(\psi_1 + \frac{\pi}{2} - \phi \right) \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 \psi_1 \cos^2 \left(\psi_1 + \frac{\pi}{2} - \phi \right) + \sin^2 \psi_1 \sin^2 \left(\psi_1 + \frac{\pi}{2} - \phi \right) \right\} \frac{1}{\pi} d\psi_1 \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2\phi \end{aligned} \quad (2.31)$$

よって式 2.27 より $Rate$ は

$$Rate(\phi) = c \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 \theta}{\gamma - \sin^2 \theta} \right)^2 \cos 2\phi \right\} \quad (2.32)$$

となる。あるいはより直接的に

$$\begin{aligned} Rate(\phi) &= g \cdot P(\phi) \\ &= gh \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \psi_1) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \psi_1 + \frac{\pi}{2} - \phi) \frac{1}{\pi} d\psi_1 \\ &= c \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 \theta}{\gamma - \sin^2 \theta} \right)^2 \cos 2\phi \right\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

となる。特に後者の導き方は \overline{ab} とは全く無関係に求まっている。よって Bell の不等式などというものを全く知らなくても、 $Rate$ の測定値から直接に隠れた変数理論の検証ができる。

511keV ほどの光子に対する偏極板が開発されたら、仮定 2.30 は実験事実として今回の実験でも援用できたであろうが、実際にはこのような仮定を正当化する実験結果はない（あったとしても筆者がそれを知らない）ので、仮定 2.30 を使うわけにはいかなかった。したがって今回の実験では隠れた変数理論の検証として Bell の不等式を利用した。

2.3.3 量子力学に基づく $\overline{ab}(\phi)$ の測定

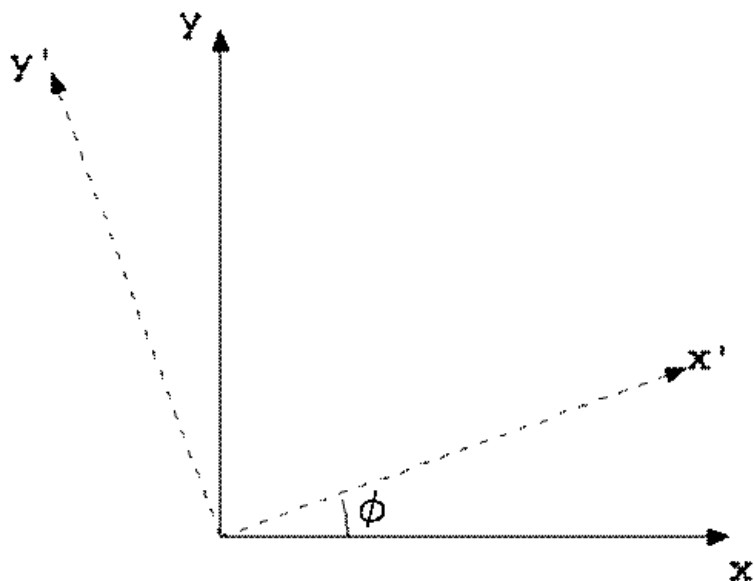
まず、光子の偏極の観測を考える。今までやってきたように、光子は $|x\rangle$ と $|y\rangle$ の 2 準位に分けることができる。これらの観測のために、 x 方向に固定した偏極板を考えると、 $|x\rangle$ に偏極した光子は通過できるが、 $|y\rangle$ に偏極した光子は通過できない。

2 光子に対してそれぞれ偏極板を 1 枚設置する。このとき次のような数 a, b を導入する。

$$\begin{aligned} \text{光子 1 が偏極板 1 を通過するとき} & \quad a = 1 \\ \text{通過しないとき} & \quad a = -1 \\ \text{光子 2 が偏極板 2 を通過するとき} & \quad b = 1 \\ \text{通過しないとき} & \quad b = -1 \end{aligned}$$

この数は Bell の不等式のセクションで考えた a, b の定義に則っている。

ここで xy 座標から ϕ 傾いた $x'y'$ 座標について考える。



$x'y'$ 座標と xy 座標

上図のように、

$$|x\rangle = |x'\rangle \cos \phi - |y'\rangle \sin \phi$$

$$|y\rangle = |x'\rangle \sin \phi + |y'\rangle \cos \phi$$

が成り立つ。

偏極板 1 が x 方向に、偏極板 2 が x' 方向に向いているとする。光子 2 の状態に上記の座標変換を施して新たに波動関数を書き直すと、

$$|F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle|y\rangle - |y\rangle|x\rangle) \quad (2.34)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle|x'\rangle \sin \phi + |x\rangle|y'\rangle \cos \phi - |y\rangle|x'\rangle \cos \phi + |y\rangle|y'\rangle \sin \phi) \quad (2.35)$$

偏極板の方向から、

光子 1 が $|x\rangle$ のとき $a = 1$

光子 1 が $|y\rangle$ のとき $a = -1$

光子 2 が $|x'\rangle$ のとき $b = 1$

光子 2 が $|y'\rangle$ のとき $b = -1$

波動関数からそれぞれの確率が以下のようにわかる。

$$\begin{aligned}
 a = 1, \quad b = 1 \text{ のときの確率} & \quad \frac{1}{2} \sin^2 \phi \\
 a = 1, \quad b = -1 \text{ のときの確率} & \quad \frac{1}{2} \cos^2 \phi \\
 a = -1, \quad b = 1 \text{ のときの確率} & \quad \frac{1}{2} \cos^2 \phi \\
 a = -1, \quad b = -1 \text{ のときの確率} & \quad \frac{1}{2} \sin^2 \phi
 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 \overline{ab} &= \frac{1}{2}(\sin^2 \phi - \cos^2 \phi - \cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \\
 &= -\cos 2\phi
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

これは、 \overline{ab} が 2 つの偏極板のなす角 ϕ に依存することを示している。

次に量子力学の観点から Rate はどのように表されるのかを考える。

今回の実験では偏極板ではなくコンプトン散乱体を用いて光子の偏極の關係を見ていくので、偏極とコンプトン散乱がどのように絡んでいるかをここでは見てみよう。実験では、2 つの光子がそれぞれコンプトン散乱体でコンプトン散乱を起こし、その後 detector に入って観測される、といった流れであるが、まずコンプトン散乱の散乱断面積について、先ほど述べたような Klein-Nishina の公式がある。

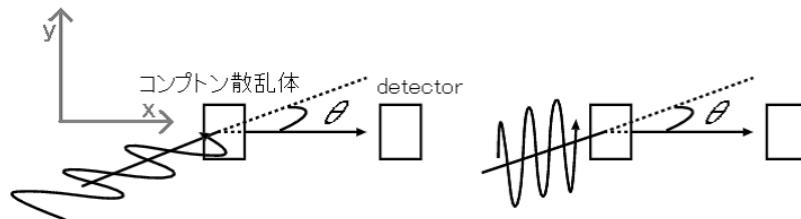
$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \psi) = \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{q}{q_0} \right)^2 (\gamma - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi) \tag{2.37}$$

ここで $\psi = 0^\circ$ のときと $\psi = 90^\circ$ のときの 2 つについて散乱断面積を計算すると以下のように書ける。¹⁰

$$\psi = 0^\circ \text{ のとき} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = c(\gamma - 2 \sin^2 \theta) \tag{2.38}$$

$$\psi = 90^\circ \text{ のとき} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = c\gamma \tag{2.39}$$

2 つの散乱断面積は同じではなく $\psi = 90^\circ$ の方が一般的に大きいことに注意したい。



¹⁰この式における c とは、 θ 一定のとき 2 つに共通する定数である。

次に、上図のように光子 1 にはたらくコンプトン散乱体 1、detector 1 は固定されており、散乱面に平行な偏極を $|x\rangle$ 、垂直な偏極を $|y\rangle$ として設定する。光子の偏極は、この散乱面に対して偏極面がなす角 ψ が $0^\circ(|x\rangle)$ のときと $90^\circ(|y\rangle)$ のときの 2 準位に分けて考えてよく、等方性からそれぞれの確率は $\frac{1}{2}$ ずつとなる。さきほど求めた散乱断面積 ((2.38), (2.39)) について考えてみると、2 つの散乱断面積の比は、光子が $|x\rangle$ の状態のときに散乱体に当たって detector まで到達する確率と、 $|y\rangle$ の状態のときに到達する確率の比に他ならない。さて、十分に多くの光子が source から放たれ、コンプトン散乱し、detector に到達し、十分な数の光子の観測データが取れたとしよう。このとき散乱体に向かった光子の $|x\rangle$ と $|y\rangle$ は同数と言ってよい。ところが断面積からわかるとおり、そのうちディテクターに辿り着くのは確率的に $\gamma - \sin^2 \theta : \gamma$ となっているはずである。つまり、detector 1 に光子が観測された場合、

$$\text{光子 1 が } |x\rangle \text{ であった確率} : \text{光子 1 が } |y\rangle \text{ であった確率} = (\gamma - 2 \sin^2 \theta) : \gamma$$

である。2 光子放出過程において、一方の光子が $|x\rangle$ ならばもう一方は $|y\rangle$ なので、光子 1 の偏極が決まれば光子 2 の偏極も決まる。光子 2 が $|y\rangle$ のときと $|x\rangle$ のときの散乱断面積について Klein-Nishin の公式で計算する。散乱面 2 が散乱面 1 から ϕ ずれていることに注意すると、その比は

$$(\gamma - 2 \sin^2 \theta \cos^2(90^\circ - \phi)) : (\gamma - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi) = (\gamma - 2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi) : (\gamma - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi)$$

これは光子 2 が $|y\rangle$ と $|x\rangle$ の数が同じときに、detector 2 まで到達する確率に等しいはずである。

以上の考察から、detector 1 と detector 2 の両方に Count がある確率 (Rate) は

$$\text{Rate} \propto (\gamma - 2 \sin^2 \theta)(\gamma - 2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi) + \gamma(\gamma - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \quad (2.40)$$

$$\propto 2\gamma^2 - 4\gamma \sin^2 \theta + 4 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \quad (2.41)$$

$$\propto 1 - \left(\frac{\sin^2 \theta}{\gamma - \sin^2 \theta}\right)^2 \cos 2\phi \quad (2.42)$$

これは同じ量子力学から導かれた式 (2.36) より

$$\text{Rate} \propto 1 + \left(\frac{\sin^2 \theta}{\gamma - \sin^2 \theta}\right)^2 \overline{ab} \quad (2.43)$$

と書き直すことができる。隠れた変数の理論から導き出された式 (2.27) と同じ形となっている。従って、実験によって Rate を測ることで \overline{ab} がわかるので、正しいのは”隠れた変数の理論”か”量子力学”かわかるのである。

第3章 実験装置

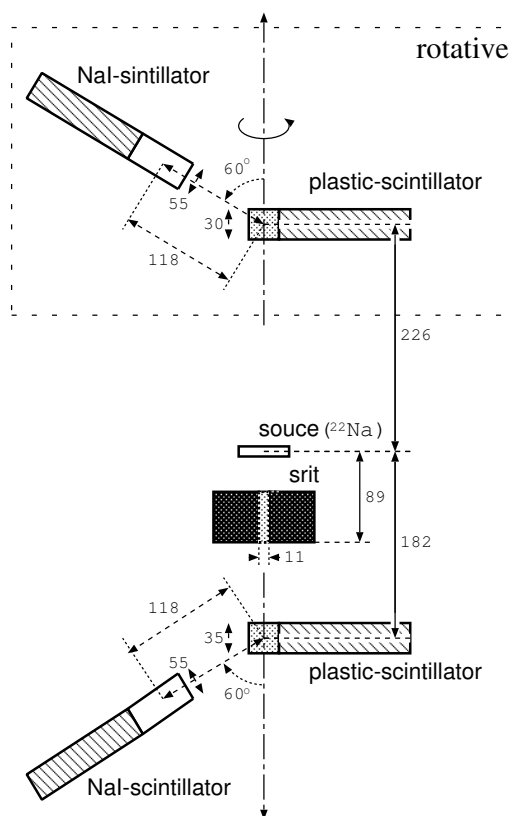


fig.1 装置の幾何学的配置 (長さの単位:[mm])

線源として ^{22}Na を用いて図 (fig.1) に示すようにセッティングした。これらの長さは NaI scintillator の中心、plastic scintillator の中心、線源の中心それぞれの間の距離である。この図では線源からの光子を遮蔽するものは slit しかないが、実際には slit とは別に鉛を用いて線源からの光子の経路を制限し、plastic scintillator を通過する光子以外は通過できないようにした。

3.1 この装置を用いた Rate の測定

このような装置のもとで、上下の NaI scintillator、plastic scintillator、合計 4 つの scintillator の coincidence をとり、Rate の値として単位時間当たり

に観測される coincidence の回数を算出した。

$$\text{Rate} = N(\text{coincidence の回数})/T(\text{測定時間})$$

この coincidence により上下の NaI scintillator に入った光子が、それぞれ上下の plastic scintillator で散乱された後に入ってきたものであることをより確かなものとした。

また coincidence が取れたときの NaI scintillator からの信号の強度を adc を用いて測定し、calibration によりあらかじめ求めていた信号強度と入射光子のエネルギーとの対応関係から NaI scintillator に入ってきた光子のエネルギーを求め、コンプトン散乱後の光子のエネルギーの理論値と比較することにより、NaI scintillator への入射光子が plastic scintillator からコンプトン散乱してきたことを確かめる 1 つの材料とした。

これと同様の測定を、装置の上部を回転させ上下の NaI scintillator 間にさまざまな相対的角差 ϕ をつけて繰り返した。

以上は Rate の測定の概要であり、具体的な測定方法、およびノイズの影響を取り除いた Rate の算出方法は後述することにするので悪しからず。

3.2 それぞれの scintillator での電子との相互作用、および信号の見え方

Table.1 plastic scintillator(BC-400) の入射エネルギー 511keV の光子によるそれぞれの相互作用の減衰係数

Interaction	Attenuation[cm ² /g]
Total	9.3 ~ 9.4 × 10 ⁻²
Coherent Scattering	1.3 ~ 1.4 × 10 ⁻⁴
Incoherent Scattering	9.3 × 10 ⁻²
Photoelectric Absorption	5.8 ~ 5.9 × 10 ⁻⁶
Pair Production	0.0 × 10 ⁻⁰

Table.2 NaI scintillator の入射エネルギー 341keV の光子によるそれぞれの相互作用の減衰係数

Interaction	Attenuation[cm ² /g]
Total	1.4 × 10 ⁻¹
Coherent Scattering	9.7 ~ 9.8 × 10 ⁻³
Incoherent Scattering	8.4 ~ 8.5 × 10 ⁻²
Photoelectric Absorption	4.5 ~ 4.6 × 10 ⁻²
Pair Production	0.0 × 10 ⁻⁰

ここで Coherent Scattering とはいわゆるレイリー散乱をあらわし、Incoherent Scattering はコンプトン散乱をあらわす。

まず Table.1 を見てみる。plastic scintillator のコンプトン散乱体としての役割を確かめる。511keV というのは線源から出た直後の光子のエネルギーである。相互作用が incoherent scattering(コンプトン散乱) により占められているのがわかる。とくに Coherent Scattering(レイリー散乱) の減衰係数はとても小さい。つまり有機散乱体はコンプトン散乱を利用するこの実験にとっても適した散乱体といえる。

次に Table.2 を見てみる。NaI scintillator のエネルギー値の解析性能を確かめる。341keV というのは散乱角 $\theta = 60^\circ$ におけるコンプトン散乱後の光子のエネルギーである。このうちレイリー散乱は電子に運動エネルギーを与えることはなく、観測にはかからないのでここでは考える必要はない。PTM は相互作用により電子に与えられた運動エネルギーを測定するものであるからである。そうすると incoherent scattering(コンプトン散乱) と Photoelectric Absorption(光電効果) が主な相互作用となっているのがわかる。この減衰係数の比から NaI scintillator から得られる信号に対する event 数の分布はコンプトン散乱によるものと、光電効果によるものが混ざったものであることがわかる。とくに光電効果による event 数の分布は入射光子のエネルギーにほぼ等しい強度のところに鋭いピークを持つものとなるのでエネルギー値を解析をするのにとても適している。

3.3 数値計算による散乱角 $\theta = 60^\circ$ としたことの評価

以下では数値計算によって、セッティングにおける θ がこの実験にどのような影響を及ぼすかを考える。その前にこの数値計算は、実験のセッティングを決定した後に行ったものであり、残念ながらこの実験に活かされたものでないことに注意しておいていただきたい。

3.3.1 散乱角のばらつき

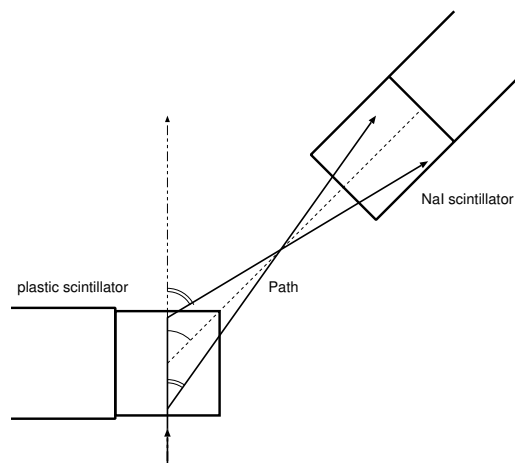


fig.2 散乱角にばらつきが出る様子

次の図は plastic scintillator 内での散乱における散乱角が、散乱の起こった点、NaI scintillator での相互作用の起こった点に依存して、セッティングの θ の値からずれる様子を表している。このようにシンチレーターが有限の大きさを持っているために散乱角にばらつきが生じる。これを下げるためには単純にシンチレーターの大きさを小さくする、あるいは NaI scintillator, plastic scintillator 間の距離を大きくすればよい。しかしこのやり方ではいずれも同じ回数 of event を測定するのに膨大な時間を要するようになる。すなわち限られた時間の実験ではこの有限の大きさによる、幾何学的な誤差は受け入れざるを得ない。

3.3.2 セッティングにおいて $\theta = 60^\circ$ とした理由

今回われわれはセッティングにおける角 θ を以前までは 90° で測定していたところを 60° に変更した。その理由は以下のように 2 点あげられる。

まず第 1 に、 $k = 1$ と実験で得られる k の値とのずれが小さくなると思われる点である。

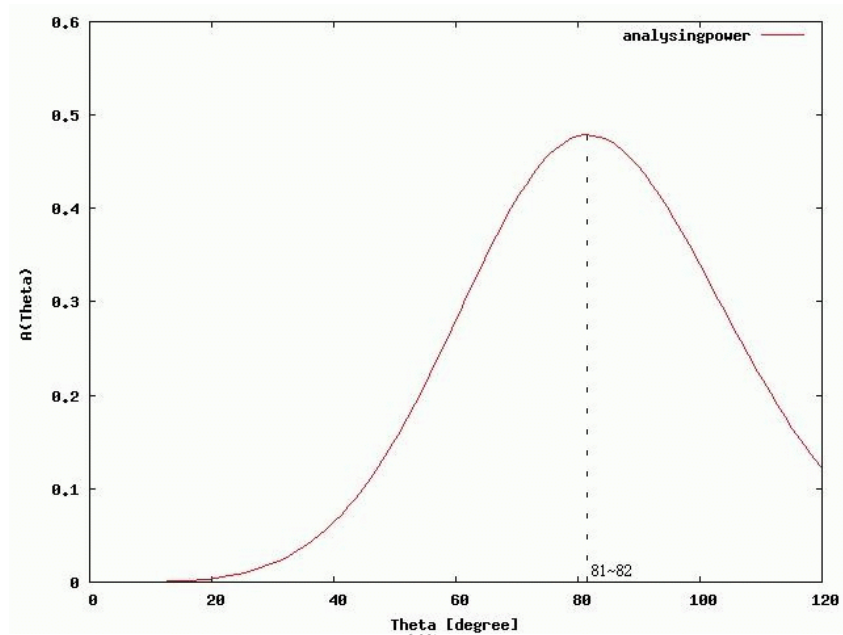


fig.3 データの解析のし易さ

上のグラフ (fig.3) は Rate の $k = 1$ の理論式、

$$R(\phi)|_{\theta} \propto 1 - \left(\frac{\sin^2 \theta}{\gamma(\theta) - \sin^2 \theta} \right)^2 \cos(2\phi) \quad (3.1)$$

における $\cos(2\phi)$ の係数、

$$A(\theta) \equiv \left(\frac{\sin^2 \theta}{\gamma(\theta) - \sin^2 \theta} \right)^2 \quad (3.2)$$

をプロットしたものである。先に述べた散乱角のずれを考えるとこの $A(\theta)$ の平均値は $A(\theta)$ とはずれてくる。極端な例として $\theta = 82^\circ$ の場合を考えればわかりやすい。 82° が $A(\theta)$ の極大であることから、光子の経路が $\theta = 82^\circ$ からずれたとき、それにより得られる $A(\theta)$ の値は $A(82^\circ)$ より小さな値となる。つまりこのとき実験により得られるであろう Rate の結果を、

$$R(\phi)|_{EX} \propto 1 - \tilde{A} \cos(2\phi) \quad (3.3)$$

とすると、 \tilde{A} は $A(82^\circ)$ より小さくなるので、理論式

$$R(\phi)|_{\theta=82^\circ} \propto 1 - kA(82^\circ) \cos(2\phi) \quad (3.4)$$

と比べ $k|_{EX}$ を算出すると 1 より小さい値となる。

これは散乱角が θ より大きくなって、小さくなくても \tilde{A} の値を下げるほうに働いているためである。もしも散乱角が θ より大きくなった時と小さくなったときで \tilde{A} の値を変化させる効果を互いに打ち消してくれれば理論値

$k = 1$ に近い値が得られる。そのために 90° より 60° がそれに適していると判断した。

以上のことは実際には上下の光子の散乱角は異なっているはずなので、上下の散乱角をそれぞれ θ_1 、 θ_2 として

$$A(\theta) \equiv \left(\frac{\sin^2 \theta_1}{\gamma(\theta_1) - \sin^2 \theta_1} \right) \left(\frac{\sin^2 \theta_2}{\gamma(\theta_2) - \sin^2 \theta_2} \right) \quad (3.5)$$

を用いて 2 変数で議論すべきであるが、説明を簡単にするために $\theta_1 = \theta_2 \equiv \theta$ とした。もちろん、明らかなようにこのときもこのような結果となることに変わりはない。

第 2 に、 $\theta = 60^\circ$ としたことによる event 観測率の向上があげられる。これは図 fig.4 を見ていただければ明らかであると思う。このように散乱角が小さいほうが微分散乱断面積は大きくその方向での観測頻度が上がる。時間の限られた実験ではデータ数を稼ぐためにとても重要な要素である。

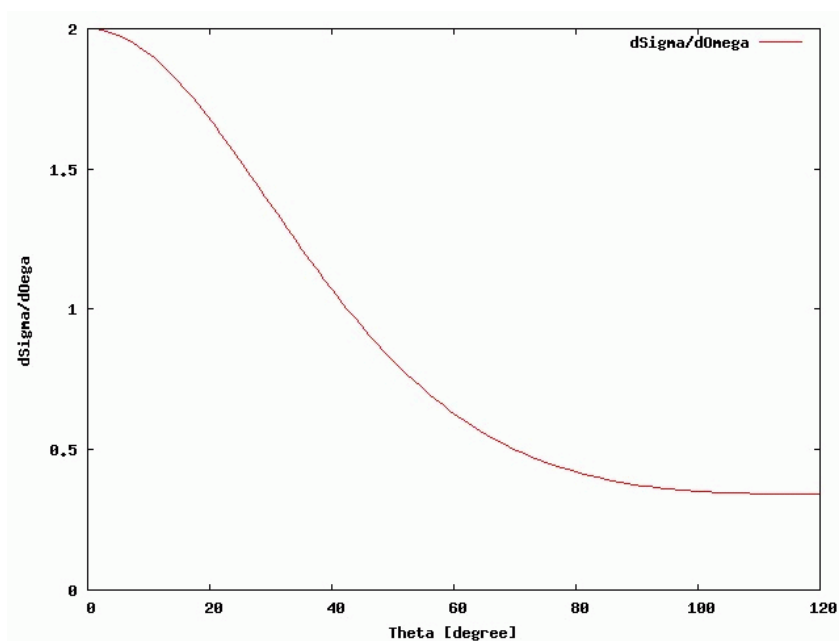


fig.4 コンプトン散乱の微分散面積 (入射光子の偏極方向について平均をとってある)

3.3.3 数値計算による各 θ における $k|_{EX}$ の値

まずこの数値計算は $\theta = 90^\circ, 82^\circ, 75^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ, 15^\circ$ のそれぞれにおいて、 $\phi = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ それぞれについての coincidence のおこる確率 (正確にはこれをおある定数倍した値、つまり比が等しい) を求め

て、その値に関数

$$R(\phi)|_{\theta} = C \times (1 - kA(\theta) \cos(2\phi)) \quad (3.6)$$

を C 、 k をパラメータとして Fitting して、この k を $k|_{EX}(\theta)$ として求めたものである。

このようにして求めた $k|_{EX}(\theta)$ は以下のようなになる。

Table.3 $k|_{EX}(\theta)$ の値

θ	$k _{EX}(\theta)$
90°	0.907686
82°	0.906006
75°	0.909503
60°	0.937698
45°	1.00681
30°	1.19524
15°	2.40580

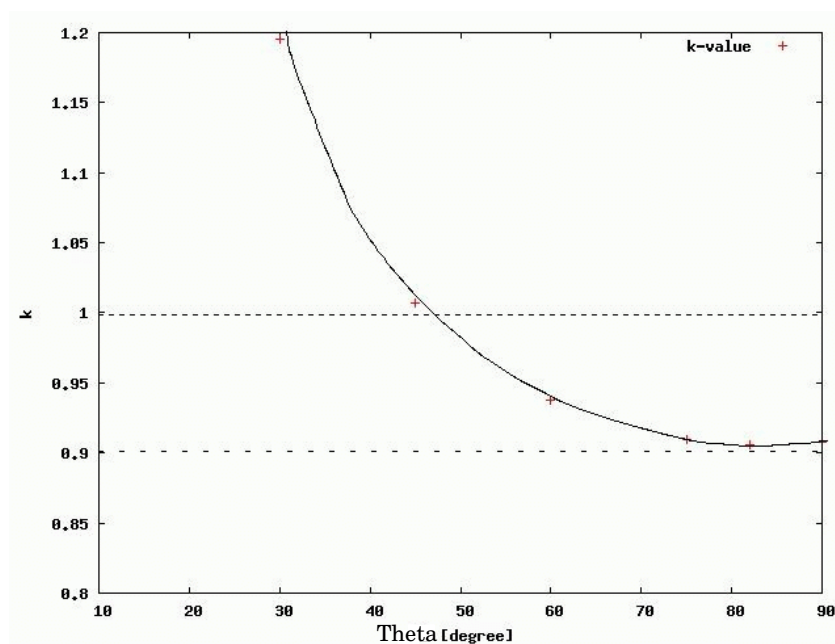


fig.5 $k|_{EX}(\theta)$ の値

3.3.4 良い θ のセッティング

以上のことから、数値計算を用いて実験のセッティングを決める上での θ の決め方を 2 通り示す。

まず、数値計算の結果から $k|_{EX}(\theta) = 1$ となる θ を求めてこの角度でセッティングする方法は、よくないと思われる。この方法の利点は実験結果が $k = 1$ に近くでるだけである。しかしこれは数値計算で得られていた結果を用いているのであって、他の角度で実験をおこなって、得られた結果と数値計算の結果とを比べるのとなんら変わらない。先に述べた利点は実際には利点でなく、自己満足に終わっている。数値計算をおこなうという前提では $k = 1$ である必要はまったくない。

1つ目の方法は $k|_{EX}(\theta)$ の極小の θ 、つまり $\theta = 82^\circ$ を用いる方法である。この利点は $k|_{EX}(\theta)$ が極小値であるために、装置のセッティング上での不可避な角度 θ の微小なずれに対して、実験で得られる $k|_{EX}(\theta)$ の値が安定するという期待ができることである。これは実験結果の安定性を重視した方法といえる。

それに対して2つ目の方法は analyzing power を重視した方法といえる。式

$$R(\phi)|_\theta = C(\theta) \times (1 - A(\theta) \cos(2\phi)) \quad (3.7)$$

により実験結果の Rate の振幅は $C(\theta)A(\theta)$ である。解析のし易さというのはこの値と error bar の長さの比で決まると考えられる。error bar の長さは統計的な標準偏差の定義から

$$\text{error bar} = \frac{\text{Rate}}{\sqrt{\text{event 数}}} \quad (3.8)$$

である。ここで event 数は上下の coincidence をとっているので測定時間を一定とすれば、

$$\text{event 数} \propto \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta^2 \quad (3.9)$$

と考えられる。さらに

$$\text{Rate} \simeq C(\theta) \quad (3.10)$$

として、

$$\text{error bar} \propto \frac{C(\theta)}{\frac{d\sigma}{d\Omega}|_\theta} \quad (3.11)$$

よって Rate の振幅と error bar との比は

$$\frac{C(\theta)A(\theta)}{\text{error bar}} \propto A(\theta) \frac{d\sigma}{d\Omega}|_\theta \equiv E(\theta) \quad (3.12)$$

となる。この右辺をプロットすると fig.6 のようになる。つまり限られた測定時間での実験で、一番効率よく analyzing power を得る角度は 73° 付近であることがわかる。この方法はこの角度を用いて実験をおこなう方法である。

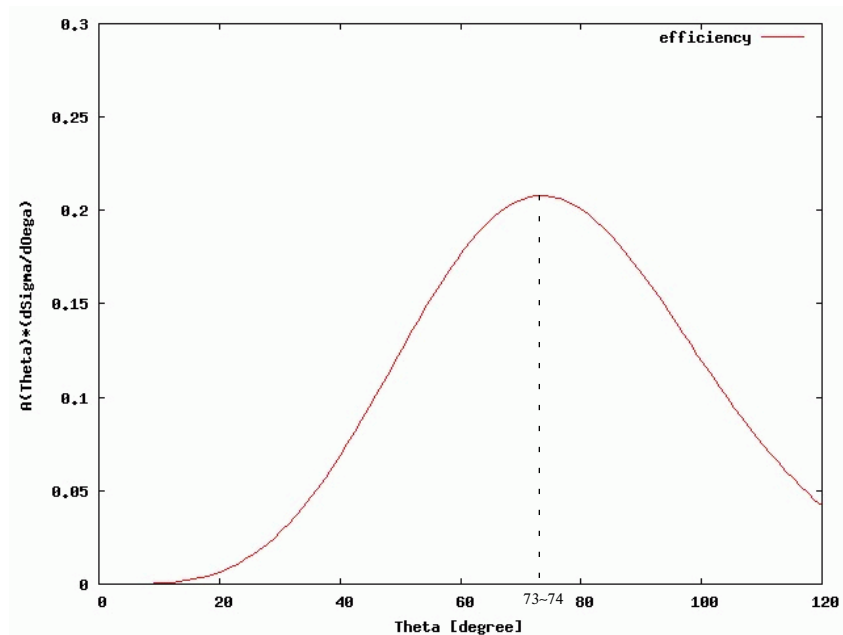


fig.6 $E(\theta)$ の値

ここで2つの角度を挙げたが、これら2つの角度はそれほど離れていない。そこで2つの方法を踏まえて75°~80°ととってみる。このようにしても2つの方法の利点はほとんど保たれている。以上より、今回のセッティングではこの間の角で実験をおこなうのがベストであると考えられる。

$\theta = 60^\circ$ としたことを評価してみる。まず第1の観点から考えると、fig.5より $\theta = 60^\circ$ ではそれほど $k|_{EX}(\theta)$ の値は安定していないのがわかる。 $\theta = 90^\circ$ と比べるとこの点では $\theta = 90^\circ$ が優る。次に第2の観点から考えると、fig.6より $\theta = 60^\circ$ はそれほど悪くはない。 $\theta = 90^\circ$ と比べるとこの点ではわずかながら $\theta = 60^\circ$ が優る。

第4章 実験結果

4.1 Calibration について

本実験である Rate の測定実験において得られるデータは単位がエネルギーではなく ADCchannel という形であるため、このデータをエネルギーの単位に直すために Calibration という操作を行う必要がある。具体的には、実験装置に用いる上下二つの NaI シンチレータの本実験と同じ環境における線源 Na、Cs、Co についての ADCchannel をとり、既知のものであるこれらの γ 線のエネルギーと対応させた。その結果のグラフを以下に示した。すべての点がほぼ直線状に乗っており、信頼性が非常に高いものと判断して、この結果を本実験で用いた。

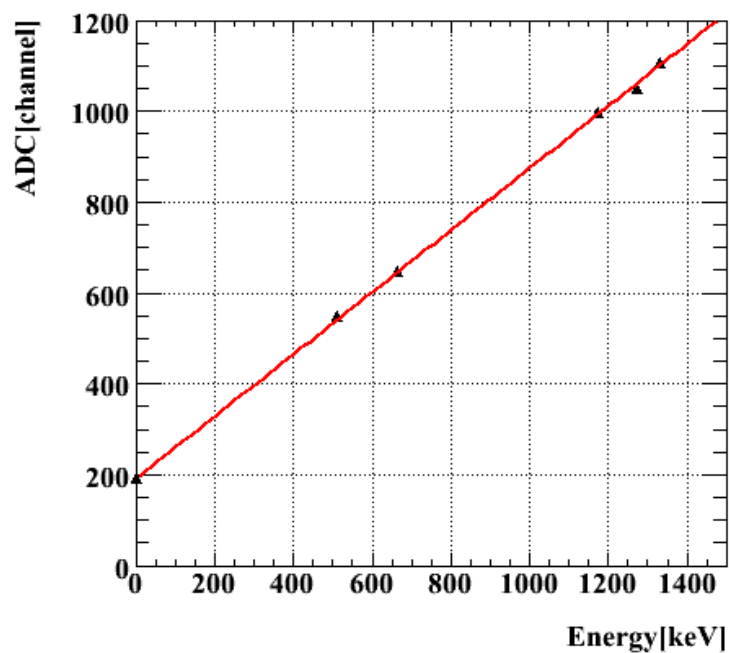


図 4.1: Calibration の結果のグラフ (NaI (下))

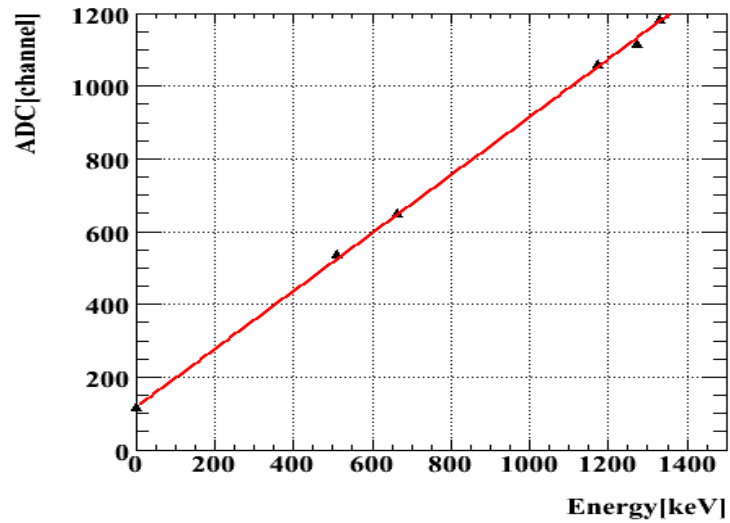


図 4.2: Calibration の結果のグラフ (NaI (上))

上のグラフに用いたそれぞれの線源についての ADCchannel と観測された数である Event のヒストグラムで Cs の場合のみを以下に示した。ここで、上のグラフで用いた ADCchannel の値は、光電ピークである部分を選び、それを Gauss 分布で Fitting した結果を青色の曲線で示し、この平均値を用いた。

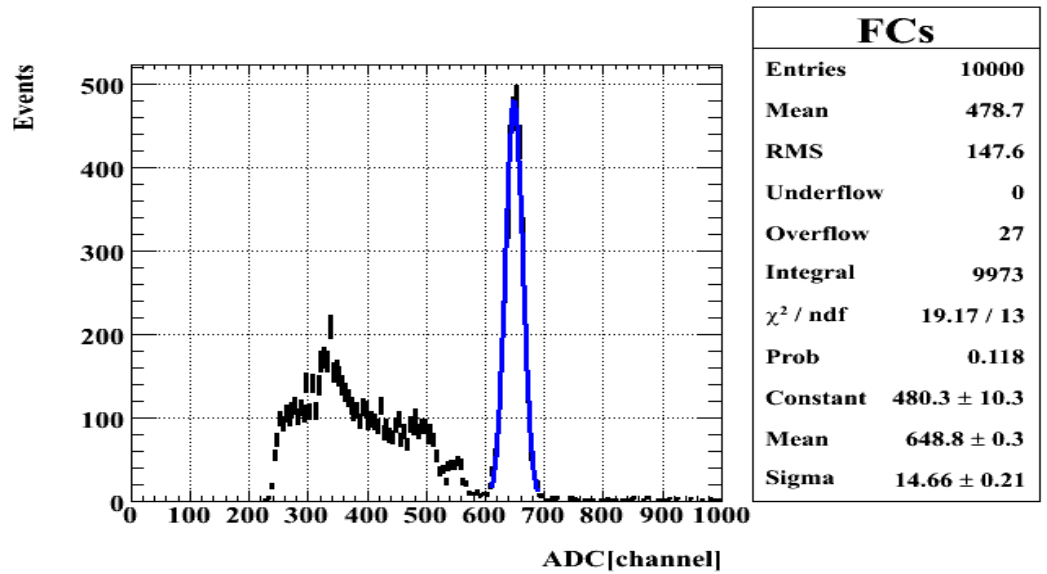


図 4.3: Calibration の結果 (NaI (下) の Cs の場合)

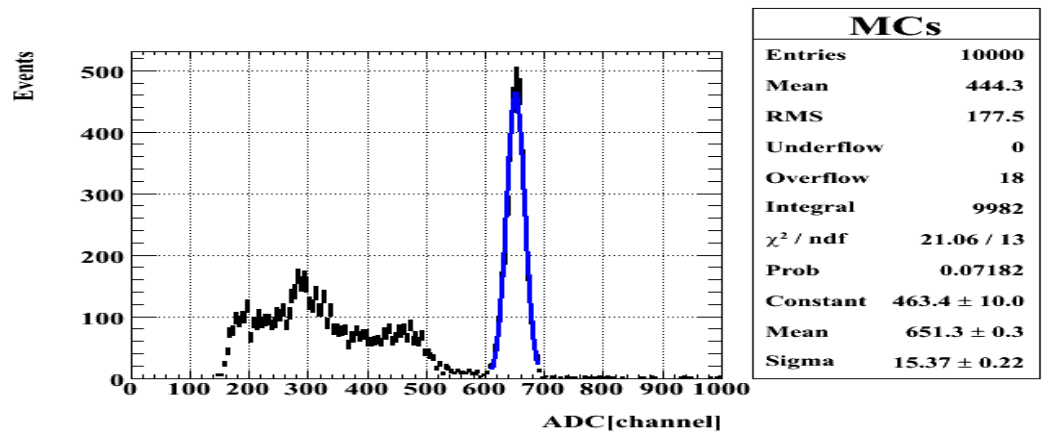


図 4.4: Calibration の結果 (NaI (上) の Cs の場合)

4.2 Rate 測定の結果

実験原理の部分でも説明したとおり今回の実験は、上下2つの γ 線の散乱面のなす角 $\phi(\text{rad})$ を変えたときのRateの変化を見るのであるが、本実験においては ϕ については $0 \sim \pi$ までを $\pi/6$ 刻みにとった7pointとそれに $\pi/4$ と $3\pi/4$ の2pointを加えた計9pointで実験を行った。各 ϕ でコインシデンス

した Event を約 45 時間かけて約 2000event 取り、Rate は

$$Rate = (\text{有効 Event 数}) / (\text{測定にかかった時間}) \quad (4.1)$$

で求めた (但し $\phi = 2\pi/3$ においてはデータをさらに取り足した)。ここでいう有効 Event 数とは、後のヒストグラムのところでも詳しく述べるが、観測された Event のうちノイズなどを取り除いた部分の Event 数である。

以下に、Rate と散乱面の成す ϕ の関係をグラフ化したものを示した。但し各点における統計誤差を $\sigma = \frac{\sqrt{\text{有効 Event 数}}}{\text{測定にかかった時間}}$ とし、これをグラフ中に Error bar として描いた。

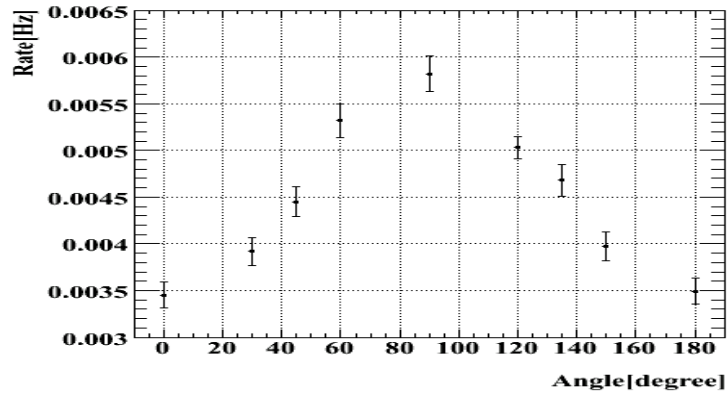


図 4.5: Rate 測定の結果 (1)

これを $Rate = c\{1 - k(\frac{\sin^2\theta}{\gamma - \sin^2\theta})^2 \cos 2\phi\}$ で Fitting したものが次のグラフである。このとき k は $k \approx 0.89 (> \frac{1}{\sqrt{2}})$ である。Fitting した曲線上に各 ϕ の Error bar が乗っていることから、また、実験で得られた Rate と Fitting で得られた Rate で χ^2 検定を行うと $\chi^2/7 \approx 0.525$ となることから、十分良い Fitting となっていることがわかる。

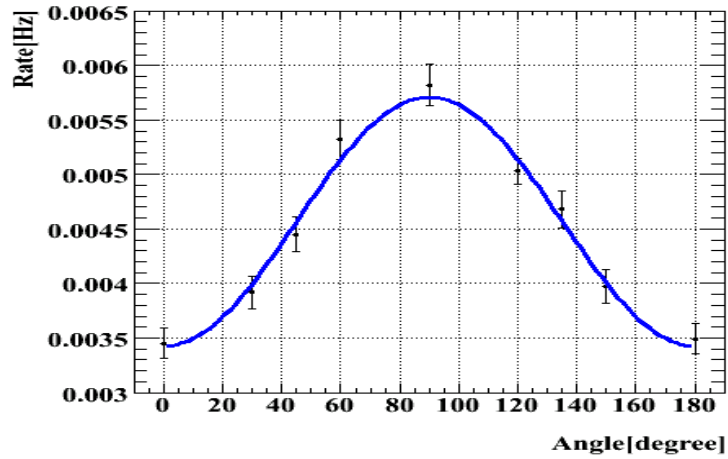


図 4.6: Rate 測定の Fitting 結果 (2)

上の Rate のグラフで使用した各角度 ϕ におけるヒストグラムのうち、 $\phi=\pi/2$ のものを以下に示した。なお、横軸については、Calibration の結果を用いて Energy 単位に直してある。

図 4.7、図 4.9 の青の曲線は Fitting の結果である。図 4.8、図 4.10 においては、ノイズ等を取り除くために、NaI で観測されたもののうち光電ピーク付近の Event のみを Rate の計算では使用したが、その使用した範囲を示した。Compton 散乱部分を Rate の計算において使用することも可能だが、スレッシュホールドによる影響が大きく、安定性に欠き、また、光電ピークのほうが見た目にもわかりやすいので、光電ピーク付近 (光電ピークから $\pm 60(\text{keV})$ 程度の範囲) のものを使用した。

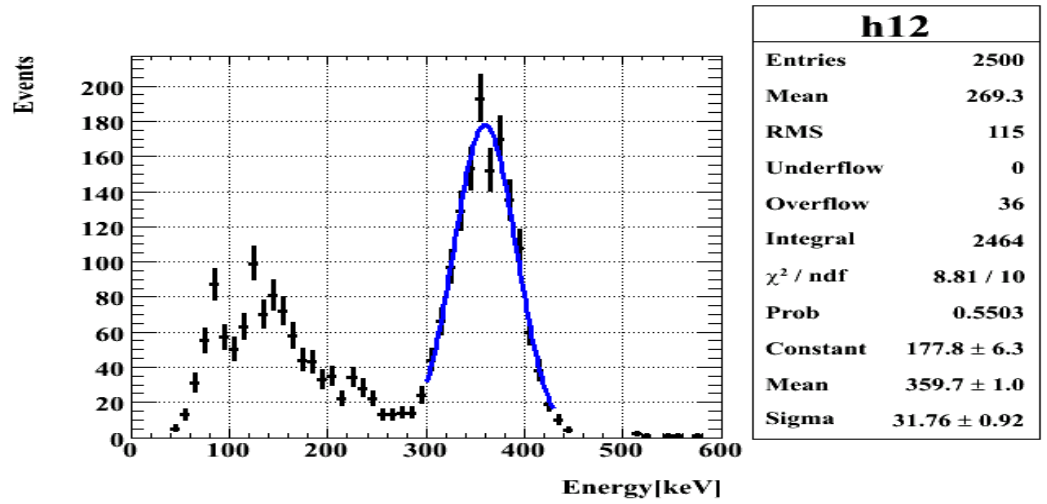


図 4.7: NaI(下) の Energy-Event のグラフ ($\phi=\pi/2$)

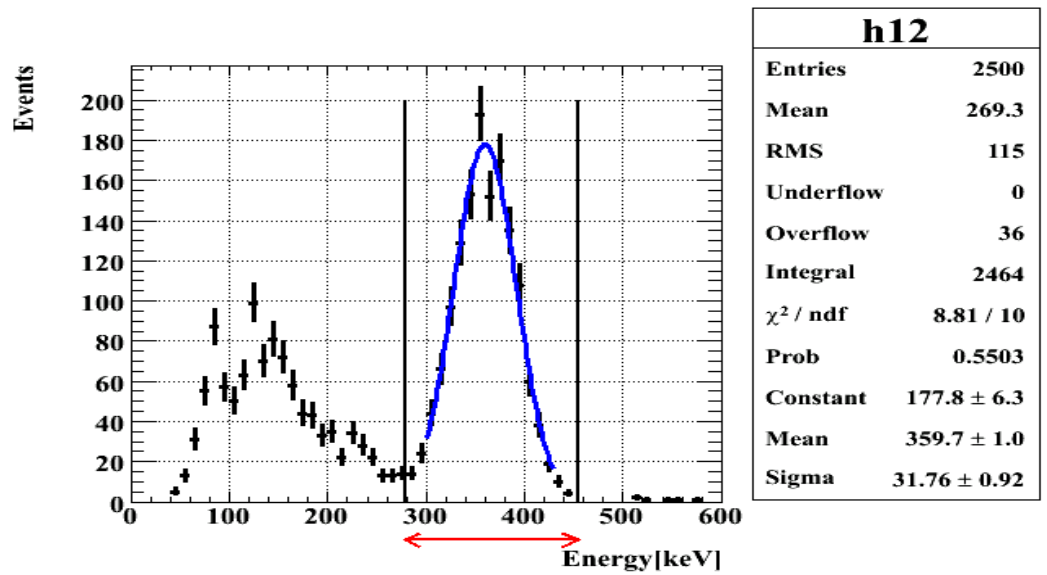


図 4.8: cutting の範囲 (NaI(下)、 $\phi=\pi/2$)

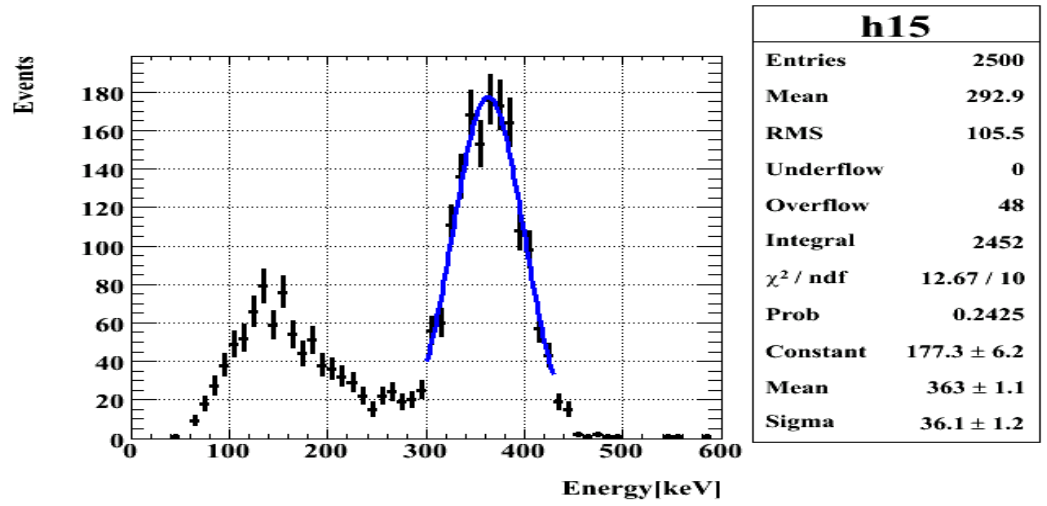


図 4.9: NaI(上) の Energy-Event のグラフ ($\phi=\pi/2$)

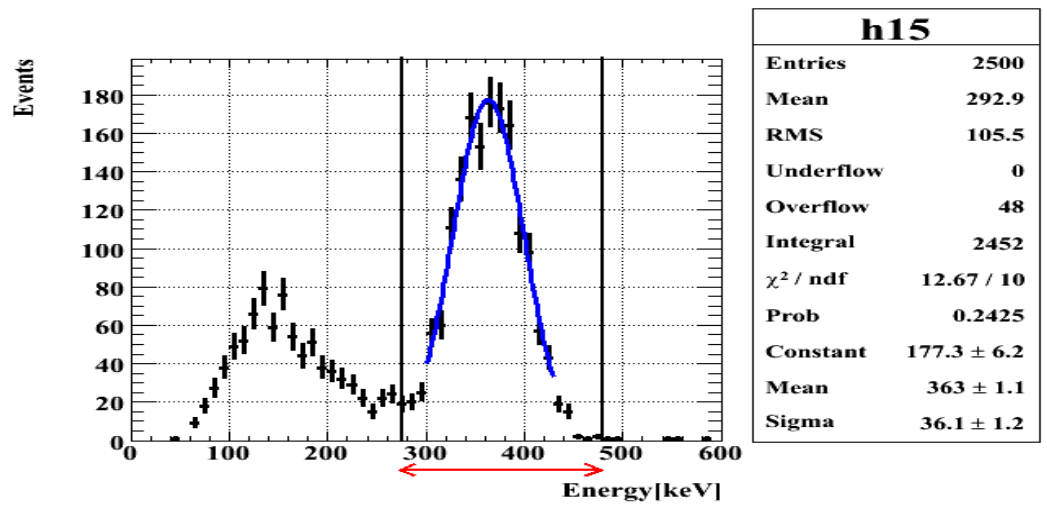


図 4.10: cutting の範囲 (NaI(上)、 $\phi=\pi/2$)

第5章 結論と考察

以下に、Rate に対して「装置の幾何学的な大きさによる測定のぼやけを考慮に入れない場合の量子力学の予言 ($k = 1$)」、「装置の幾何学的な大きさによる測定のぼやけを考慮に入れた場合の量子力学の予言 ($k = 0.91$) (コンピュータシミュレーションで求めた)」、「ベルの不等式が満たされるための上限 ($k = 1/\sqrt{2}$)」と「実験結果 ($k = 0.89$)」をグラフで比較したものを示した(それぞれグラフ中の、緑線、赤線、ピンク線、青線で描いてある)。Rate におけるもう一つの parameter である c の値は、 $\phi = 0^\circ$ と $\phi = 180^\circ$ で、各 Rate の値が揃うように調節した。コンピュータシミュレーションについては、線源から出た γ 線は必ず散乱体の中心で散乱されるとし、NaI シンチレータの大きさのみを考慮に入れたものである。このシミュレーションによる k の値 $k = 0.91$ が実験の実際的な状況をも考慮に入れた量子力学の予言であり、測定の結果 k がこの値に近ければ量子力学の正しさが確認されたことになる。 $k = 1$ は参考程度である。

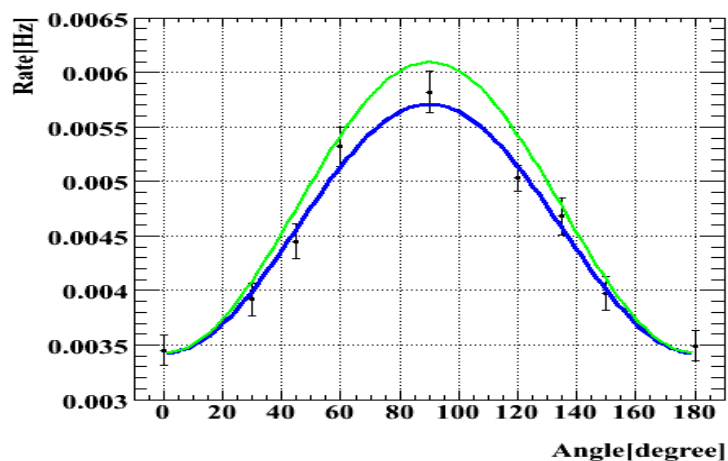


図 5.1: 量子力学との比較

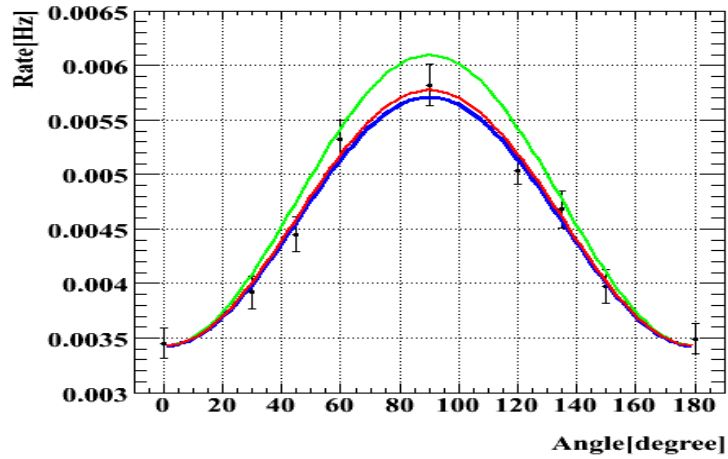


図 5.2: シミュレーションとの比較

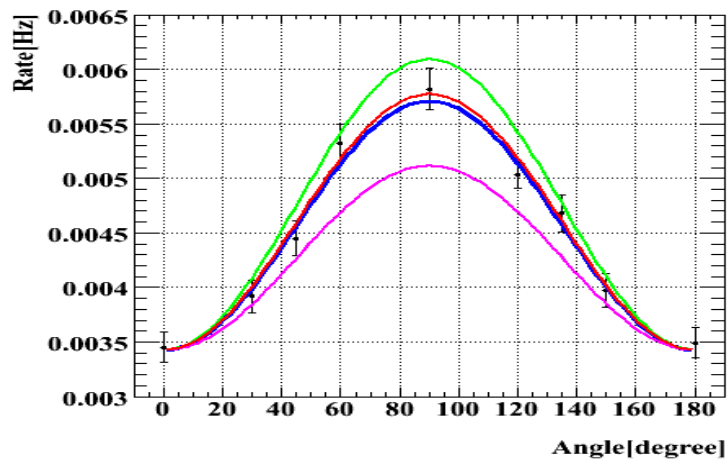


図 5.3: ベルの不等式との比較

前章で述べたように、実験から得られた Rate のグラフでは $k \approx 0.89 (> \frac{1}{\sqrt{2}})$ なので、隠れた変数理論が破られていることがわかる。

また、実験から得られた Rate のグラフは、シンチレータの大きさを無視した理想的状況で量子力学の予言する Rate のグラフとはずれているが、シンチレータの大きさを考慮したシミュレーションの結果とはほぼ一致しているので、量子力学が正しいことがわかる。

なお、Energy-Event のグラフでは NaI の上下で観測された光電ピークの Energy は

$$\text{上} : E = 363.0(\text{keV}) \quad (5.1)$$

$$\text{下} : E = 359.7(\text{keV}) \quad (5.2)$$

であるが、NaI シンチレータに大きさがなく、観測点がシンチレータの中心であるとすると、理論上の Energy は、散乱前の Energy を E 、散乱後の Energy を E' 、散乱角を θ とすると

$$E' = E/(2 - \cos\theta) \quad (5.3)$$

で表されるので、これに $E=511(\text{keV})$ 、 $\theta=\pi/3$ を代入すると

$$E' = 340.7(\text{keV}) \quad (5.4)$$

となり、これは実験結果と大きくずれている。ここで、散乱体の中心で必ず散乱されるとし、かつ NaI シンチレータの大きさを考慮に入れ、より実験環境に近いコンピュータシミュレーションを行うと、Energy は

$$E = 349.1(\text{keV}) \quad (5.5)$$

となり、実験結果に近いものとなる。

これから、我々が Rate の計算に用いたデータが、確かに線源から出た γ 線が散乱体で散乱されたものを観測したものであることがわかる。

参考文献

- 清水明 『量子論の基礎』 サイエンス社
- J.J.Sakurai “Modern Quantum Mechanics ” Addison-Wesley
- <http://www4.ocn.ne.jp/~johnny/Quant-ph.htm> “Quantum Physics への道”
- <http://nucl.phys.s.u-tokyo.ac.jp/saito/saito.html> “Takaaki Saito’s Web Site ”
- H.S.Snyder, S.Pasternack, and J.Hornbostel: Phys.Rev. 73(1948)440

謝辞

南條さん、田口さん、笹尾先生の半年に亘るご教授に心から感謝いたします。