

2011 年度後期 A1
 μ^+ の寿命と g 因子

岩佐真生 天目直宏 土橋龍人 林野竜也

平成 24 年 4 月 18 日

目次

1	実験の目的、概要	2
1.1	目的	2
1.2	概要	2
1.3	μ 粒子の g 因子	2
2	理論	2
2.1	Dirac 方程式と g 因子	2
2.2	Spin の歳差運動	4
3	実験装置	5
3.1	実験方法	5
3.2	セットアップ	5
3.3	コイル	6
3.4	回路	6
3.5	PMT	8
3.6	Discriminator の閾値設定	8
3.7	TDC	9
4	解析・結果	9
4.1	解析	10
5	考察	12
5.1	μ^+ の寿命について	12
5.2	g 因子について	13
6	反省	13

1 実験の目的、概要

1.1 目的

μ^+ の寿命、g 因子を測定する事。

1.2 概要

宇宙から来た μ^+ を観測し銅板で止める。これが崩壊してできる e^+ を観測し寿命を求める。また、銅板に磁場をかけると μ^+ のスピンの歳差運動をする。崩壊したときにできる e^+ は μ^+ のスピンの方向に飛んでいきやすいため、このことより g 因子を求める。

1.3 μ 粒子の g 因子

μ 粒子の g 因子は次の式で与えられる。

$$\boldsymbol{\mu} = g \cdot \frac{e\mathbf{S}}{2m_\mu}$$

† 1、2 章では、 $c = \hbar = 1$ の自然単位を用いる。

2 理論

2.1 Dirac 方程式と g 因子

静電場中の Dirac 方程式は

$$\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi + m\psi$$

と書ける。両辺に演算子

$$\gamma_\lambda(\partial_\lambda - ieA_\lambda) - m$$

をかけて、

$$\{\gamma_\lambda(\partial_\lambda - ieA_\lambda)\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m^2\}\psi = 0$$

$$\{\gamma_\lambda\gamma_\mu(\partial_\lambda - ieA_\lambda)(\partial_\mu - ieA_\mu) - m^2\}\psi = 0$$

ここで、

$$\begin{aligned}\gamma_\lambda\gamma_\mu &= \frac{1}{2}(\gamma_\lambda\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_\lambda) + \frac{1}{2}(\gamma_\lambda\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\lambda) \\ &= \delta_{\lambda\mu} + i\sigma_{\lambda\mu}\end{aligned}$$

これを用いると、

$$\begin{aligned} &\{(\partial_\lambda - ieA_\lambda)^2 - m^2 + i\sigma_{\lambda\mu}(\partial_\lambda - ieA_\lambda)(\partial_\mu - ieA_\mu)\}\psi = 0 \\ &\{(\partial_\lambda - ieA_\lambda)^2 - m^2 + i\sigma_{\lambda\mu}[\partial_\lambda - ieA_\lambda, \partial_\mu - ieA_\mu]\}\psi = 0 \\ &\{(\partial_\lambda - ieA_\lambda)^2 - m^2 + \frac{e}{2}\sigma_{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\}\psi = 0 \end{aligned}$$

但し、 $F_{\lambda\mu}$ は場の強さであり、

$$F_{\lambda\mu} \equiv \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}$$

で定義される。

ここで微分演算子を運動量で書き換えて

$$\{(p_\lambda - eA_\lambda)^2 + m^2 - \frac{e}{2}\sigma_{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\}\psi = 0$$

と書ける。外場が静的であるので、

$$(E - e\phi)^2\psi = \{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2 - \frac{e}{2}\sigma_{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\}\psi$$

と書ける。ただし、 E は系のエネルギーの固有値である。ここで、 $E = m + W$ と置くと

$$\{2m(W - e\phi) + (W - e\phi)^2\}\psi = \{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2 - \frac{e}{2}\sigma_{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\}\psi$$

$m \gg W$ のとき、すなわち静止エネルギーが運動エネルギーよりも十分大きいとき

$$\frac{W - e\phi}{2m} \ll 1$$

より

$$\begin{aligned} W\psi &= \left\{ \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} + e\phi - \frac{e}{4m}\sigma_{\lambda\mu}F_{\lambda\mu} \right\}\psi \\ W &\approx \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2} + e\phi - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H} \end{aligned}$$

よって、スピン 1/2 の粒子は

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} = \frac{e}{m}\mathbf{S}$$

の磁気モーメントをもつ。 μ^+ 粒子では次の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{\mu} = g \cdot \frac{e\mathbf{S}}{2m_\mu}$$

この2式より $g = 2$ が求まる。

2.2 Spin の歳差運動

磁場と spin の相互作用の Hamiltonian は

$$H = -\frac{ge}{2m_\mu} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$$

と書ける。ここで、 μ^- では $e < 0$ 、 μ^+ では $e > 0$ である。さらに \mathbf{B} は z 方向にかかった静的な均一磁場とすると H は

$$H = -\frac{geB}{2m_\mu} S_z$$

と書ける。

$$\omega \equiv \frac{g|e|B}{2m_\mu}$$

と置くと、

$$H = \omega S_z$$

である。ここで、 H と S_z が交換することより、 S_z の固有状態はエネルギーの固有状態でもある。よって、 $S_z \pm$ に対応する固有値は

$$E_\pm = \pm \frac{\omega}{2}$$

である。ここで、時刻 t での状態ケットを $|\alpha, t\rangle$ 、初期ケットを $|\alpha\rangle$ とすると

$$|\alpha, t\rangle = \exp(-i\omega S_z t) |\alpha\rangle$$

と書ける。以上から t 秒後の S_x の期待値は

$$\begin{aligned} \langle \alpha, t | S_x | \alpha, t \rangle &= \langle \alpha | \exp(+i\omega S_z t) S_x \exp(-i\omega S_z t) | \alpha \rangle \\ &= \langle S_x \rangle \cos(\omega t) - \langle S_y \rangle \sin(\omega t) \end{aligned}$$

ここではベーカー・ハウスドルフの補助定理より $\exp(+i\omega S_z t/\hbar) S_x \exp(-i\omega S_z t/\hbar)$ を

$$\begin{aligned} \exp(+i\omega S_z t/\hbar) S_x \exp(-i\omega S_z t/\hbar) &= S_x + i\omega t [S_z, S_x] + \frac{i^2}{2!} (\omega t)^2 [S_z, [S_z, S_x]] \\ &\quad + \frac{i^3}{3!} (\omega t)^3 [S_z, [S_z, [S_z, S_x]]] + \dots \end{aligned}$$

と計算した。同様にして、

$$\langle \alpha, t | S_y | \alpha, t \rangle = \langle S_y \rangle \cos(\omega t) + \langle S_x \rangle \sin(\omega t)$$

また、 $\exp(-i\omega S_z t/\hbar)$ と S_z は交換するので

$$\langle \alpha, t | S_z | \alpha, t \rangle = \langle S_z \rangle$$

以上より spin は角速度

$$\omega \equiv \frac{g|e|B}{2m_\mu}$$

で歳差運動をする。よって、角速度 ω と磁場の強さ B を求めることにより、 g 因子が

$$g = \frac{2m_\mu\omega}{eB}$$

と求まる。

3 実験装置

3.1 実験方法

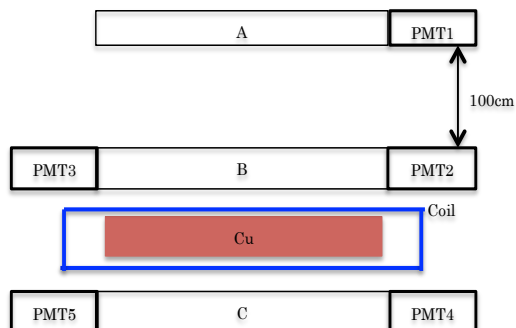
鉛直下向きに降ってきた μ^+ を磁場をかけた銅板で止めてそれが崩壊するまでの時間を測定し、そのヒストグラムから寿命を求める。また、地表に降り注ぐ μ^+ は多くが左手型であるため、初めは上向きスピンの多いが、磁場中で歳差運動するので上向きスピンの多くなったり下向きスピンの多くなったりする。また、 μ^+ が崩壊してできる e^+ は μ^+ のスピン方向に飛び出しやすいため、上と下で分けて測定すれば観測される粒子数は振動するはずである。この振動の周期から g 因子を求める。

3.2 セットアップ

μ^+ を検出しアナログ信号に変える装置は次の4つからなる。

- プラスチックシンチレータ (100 × 48 × 1cm) 3 枚
- 光電子増倍管 (PMT) 5 本
- 銅板 (50 × 48 × 1cm) 2 枚
- コイル (詳細は後述)

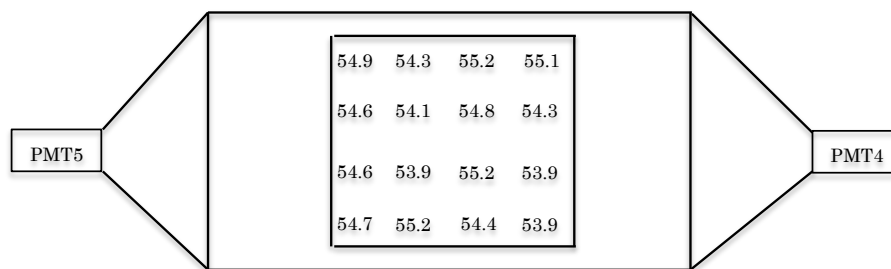
以上の装置を次の図のように配置した。



プラスチックシンチレータと PMT に光が入ると大きなノイズとなるため、遮光できているか確認する必要がある。そこで部屋を暗くした時と明るくした時のカウント数を計測し、この二つに有意な差がないことを確認した。

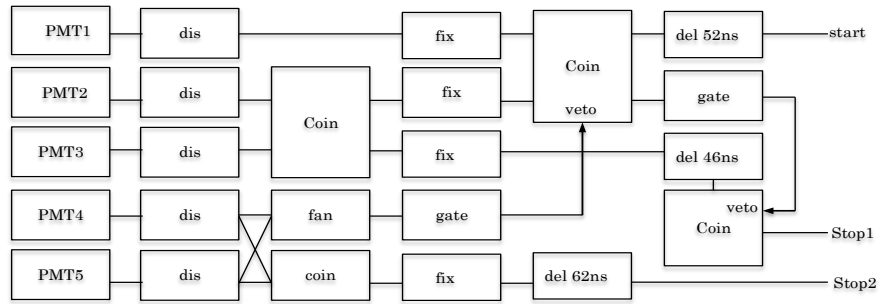
3.3 コイル

コイルは 2004 年度の卒業研究で作られたものをそのまま使わせていただいた。実験開始前に図のように、銅板上 16 カ所での磁場の強さを測定した。これから測定値として、平均及び標準偏差 $54.8 \pm 0.6\text{Gauss}$ を用いた。



3.4 回路

以下のような回路を用いて実験を行った。



- dis(discriminator) アナログ信号が指定した値を超えたときデジタル信号を出力する。
- coin(coincidence) 複数の入力端子に同時に信号が入ったときのみ出力を出す。ただし veto に信号が入力されている間は出力しない。
- fan(Fan in/out) どちらか一方の端子にでも信号が入っていれば信号を出す。
- gate(Gate Generator) 信号が入力されたとき指定された幅の信号を出力する。
- del(Delay) 信号を指定の時間遅らせる。
- fix(Fixed Delay) 信号を 105ns 遅らせる。

この回路によって TDC に出力する以下の 3 つの信号ができる。

- *Start* $(1 \wedge 2 \wedge 3) \wedge \neg(4 \wedge 5)$
- *Stop1* $(2 \wedge 3) \wedge \neg(\text{start})$
- *Stop2* $(4 \wedge 5)$

すなわち、粒子がシンチレータ A,B を通過し、銅板で止まったことを start 条件とし、その後銅板上で崩壊した μ^+ から出た e^+ がシンチレータ B を通過した時を Stop1、シンチレータ C を通過したときを Stop2 の条件とする。ここで、start 信号そのものを Stop1 信号と認識しないように、veto によって start 信号の直後 200ns は Stop1 信号がでないように Gate Generator の幅を設定した。もう一方の veto についても、PMT4 もしくは PMT5 が反応してから 800ns は start 信号が出ないようにした。

3.5 PMT

PMT は電圧をかけることで粒子の通過を電気信号として取り出すことができる。その電圧が低すぎると、シンチレータのカウント数が電圧を下げると少なくなるから、感度が落ちていることがわかる。逆に高すぎてもアフターパルスが発生し粒子が通過していないのに電気信号が発生するという事態が起こる。ゆえに各 PMT に適当な電圧をかける必要がある。そこで、PMT1 ~5 の電圧を次のように設定した。

<i>PMT1</i>	<i>2200V</i>
<i>PMT2</i>	<i>2200V</i>
<i>PMT3</i>	<i>2200V</i>
<i>PMT4</i>	<i>2200V</i>
<i>PMT5</i>	<i>2000V</i>

3.6 Discriminator の閾値設定

PMT が発生させた電気信号は Discriminator がデジタル信号に変えるが、ここで Discriminator の閾値を設定する必要がある。この閾値も低く設定しすぎるとノイズやアフターパルスを拾ってしまうなどの問題が発生し、逆に高すぎても目的の信号に対して反応しないという問題が発生する。Discriminator の閾値を 25mV、PMT の電圧を 2000V に設定して単位時間当たりに反応する割合 (シングルレート) を測定すると、次の表のようになった。

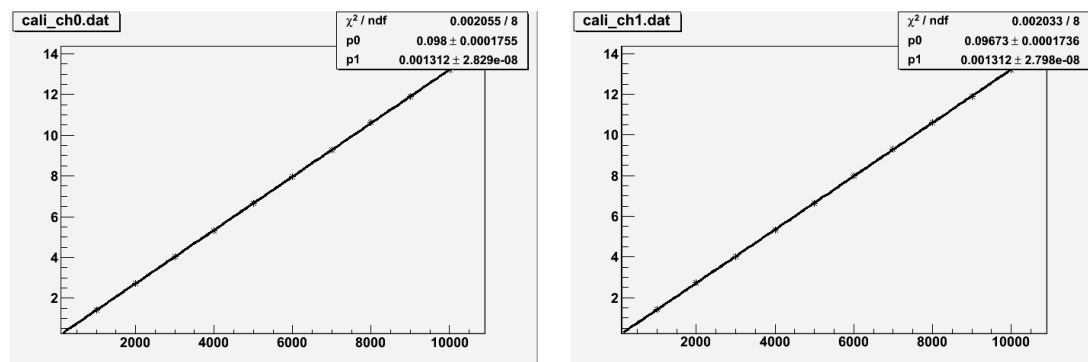
PMT	シングルレート
1	358
2	277
3	238
4	286
5	287

表 シングルレートの測定

3.7 TDC

TDC が出力する数値が Start-Stop 信号の時間差にどのように対応しているか調べるため、Clock Generator で信号を 2 つ作り、一方を TDC の Start に入力し、もう一方を Gate Generator を用いて信号を遅らせ (オシロスコープで見て肉眼で調整)TDC の ch0,1 に入力して、得られるデータを調べた。その結果を以下に示す。

ns	ch0	ch1
1000	1.421e+06	1.420e+06
2000	2.722e+06	2.720e+06
3000	4.028e+06	4.028e+06
4000	5.321e+06	5.321e+06
5000	6.651e+06	6.650e+06
6000	7.977e+06	7.976e+06
7000	9.294e+06	9.294e+06
8000	1.062e+07	1.062e+07
9000	1.190e+07	1.190e+07
10000	1.320e+07	1.320e+07



図：時間と TDCcount

カウント数を C 、時間を $T[\text{ns}]$ と書くと、ch0,1 のカウント数から時間への変換式は次のようになる。

$$T_0 = (C_0 - 98000)/1312.0$$

$$T_1 = (C_1 - 96730)/1312.0$$

4 解析・結果

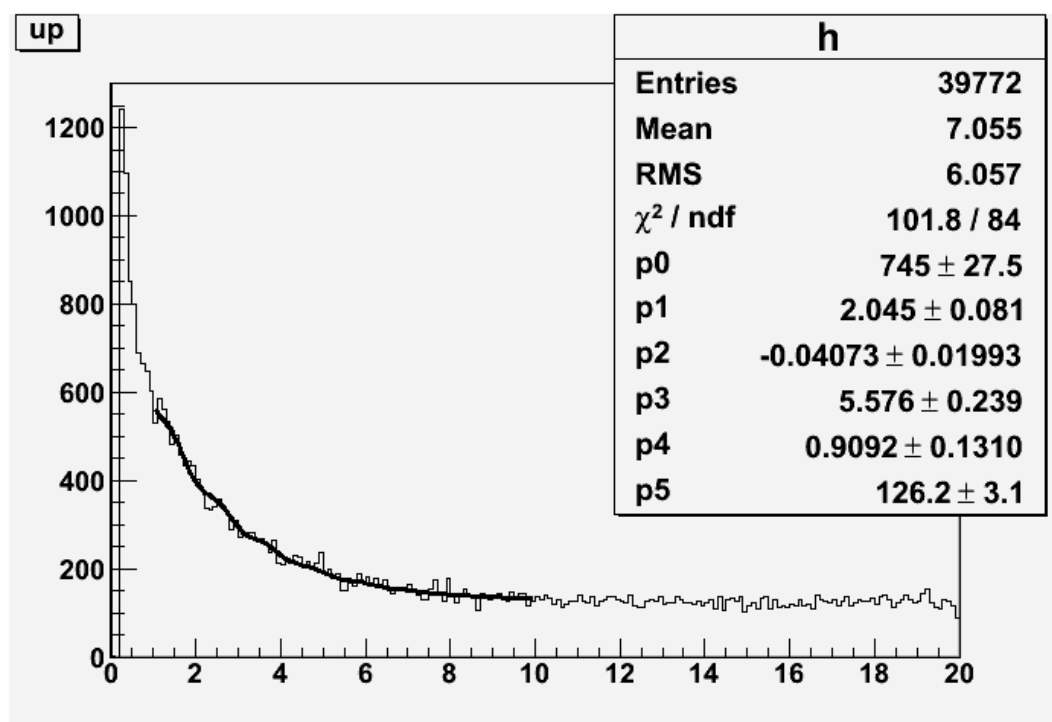
この章では得られたデータの解析方法と、それにもとづいた結果について述べる。今回の実験では、上下 2 枚のシンチレータでデータをとっているので、その 2 つのデータを解析する。

4.1 解析

今回は、寿命と g 因子を両方同時に測定しているので、それを考慮して解析を行う。粒子が崩壊する現象に加え、スピンと磁場の作用により歳差運動がおこるこので、指数関数的に減衰するのに加え、三角関数の振動項が現れると考えられるので、得られたデータを解析するのに

$$N = N_0 * \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \{1 + A \cos(\omega(t - t_0))\} + C$$

という関数を用いた。ここで、N は粒子数、 N_0 はカウント数の初期値、 t は時刻、 τ は μ^+ の寿命、A は振幅、 t_0 は初期位相、C はバックグラウンドである。しかし、今回のフィッティングはなかなかうまくいかなかった。そこで初期位相パラメータの初期値を動かしてフィッティングを試みたところ、いくつかのフィッティングパターンがでてきたので、以下ではその図を示すことにする。また、CH0 では 39772 個、CH1 では 27034 個の粒子をカウントした。



図：CH①

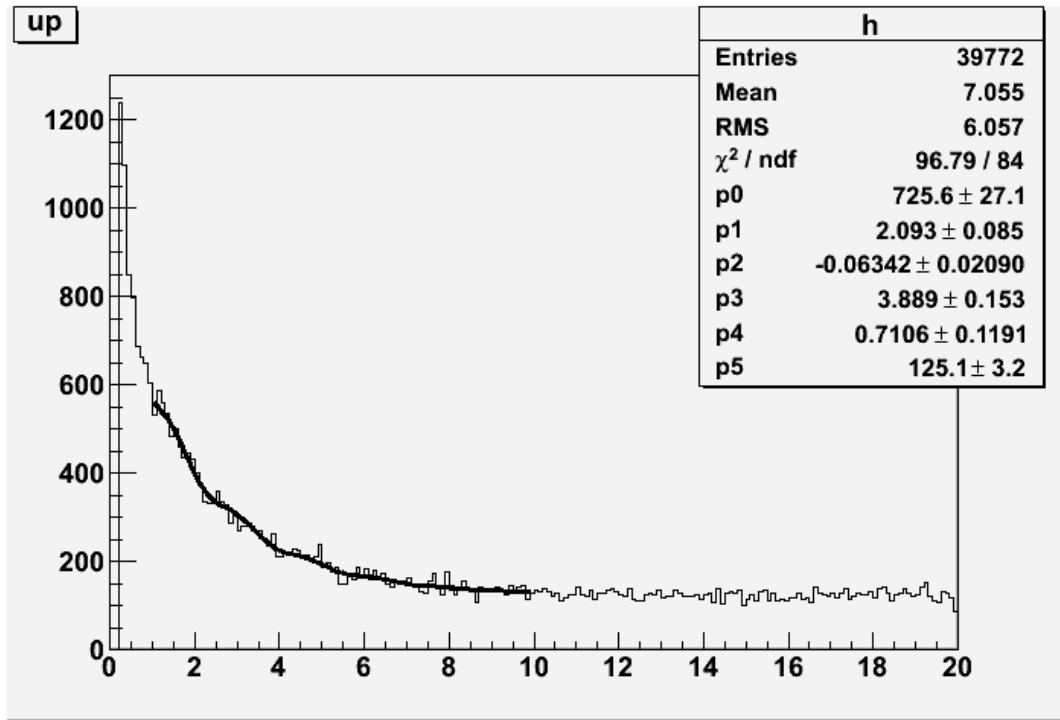


图 : CH0②

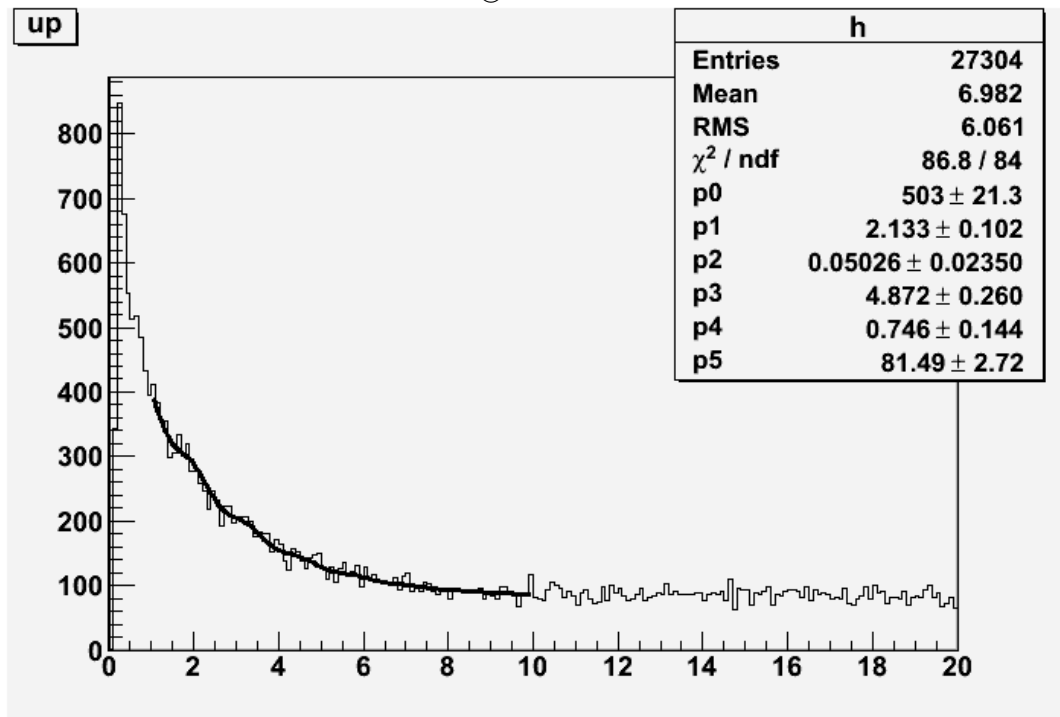
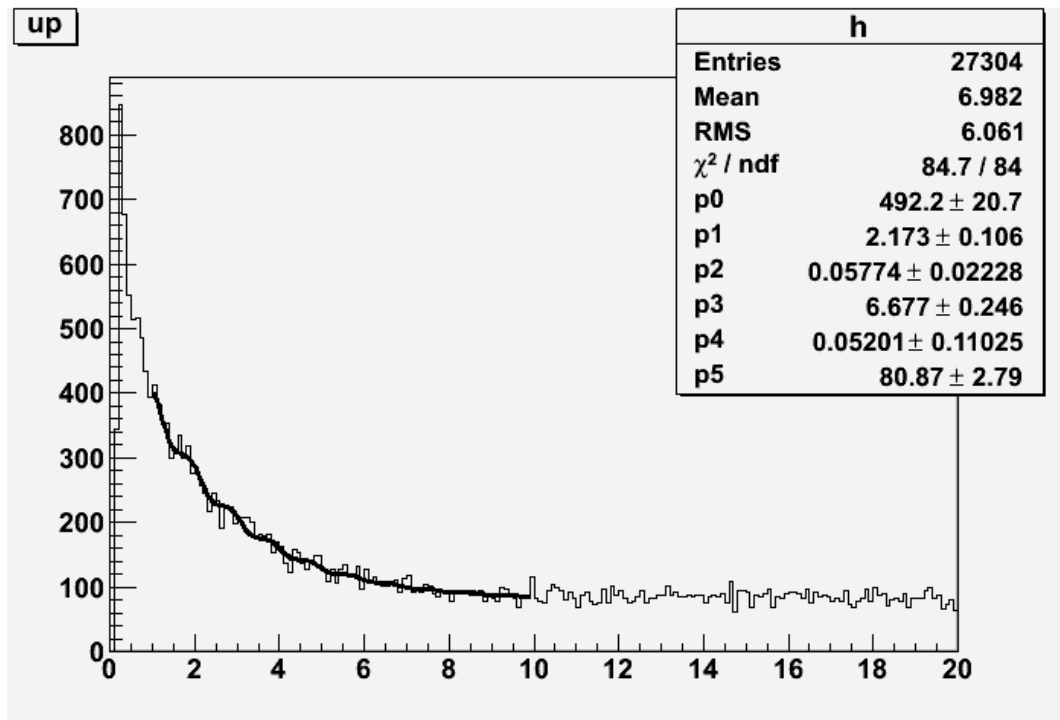


图 : CH1③



図：CH1④

このフィッティングによって得られた振動数を用いて、理論の章で得られた g 因子の表式に値を代入することで g 因子をえる。以下で、寿命を含めて結果をまとめる。

CH	$\tau(\mu\text{s})$	g 因子
CH0①	2.045±0.081	2.39±0.11
CH0②	2.093±0.085	3.64±0.24
CH1③	2.113±0.102	2.09±0.11
CH1④	2.173±0.106	2.86±0.05

表：初期位相の初期値を変えることで得られた寿命と g 因子

5 考察

5.1 μ^+ の寿命について

今回の実験で得られた結果では、すべての寿命が文献値よりも短くなっていることがわかる。唯一、④の寿命だけが、文献値に近い値となっているが、CH0 に比べてカウント数が低いこと、また誤差が大きいように感じたので、あまり信用性はないと思われる。また、全体的に CH0の方が、CH1よりも

寿命が短くなっているが、これはカウント数がまだまだ少ないために、このような結果になっていると考えられるので、もっとカウント数を多くしていけば、改善されるだろう。寿命が短い理由についてなのだが、この実験では、 μ^- も観測しているのだが、 μ^- の寿命は、 μ^+ の寿命にくらべてかなり小さいので、バックグラウンドとして考えても問題ないので、これが理由ではないだろう。

5.2 g 因子について

今回得られた g 因子がこのように得られてしまった理由としては、グラフのフィッティングがうまくいかなかったからであろう。この理由としては、データ数が少なく、歳差運動による振動がはっきりとデータに現れなかったことが考えられる。なので、カウント数を多く得て、PMT の電圧をさげてより質の良いデータを得るようにすることで、改善できるのではないだろうか。また、磁場がコイルのなかであまり一様ではなかったことで、磁場がゆらいている状態になってしまうことで、歳差運動がうまく現れなかったことも考えられる。

6 反省

今回の実験では、文献値に近い値を得ることができなかった。ここでは、反省・改善点を述べていく。この実験でのセットアップでは、2つの同時に来た信号をカウントしないようにセットアップを組んだが、次に実験を行うときは、同時に来た信号を捨てないようにセットアップを組むようにするといいたいだろう。

シンチレータの性能について、今回はあまり気にせずに実験を行ったため、このレポートでは何も書かれていないが、性能について確認しておくといいたいだろう。具体的には、どこに光を当てると検出率がいいか等。

また、PMT の閾値、印加電圧の設定についてもっと慎重に決定すべきであろう。検出率についてもう少し正確に調べて、それを下に電圧の設定などを慎重に決めるべきであった。

カウント数が少ないことと精度が低かったことが、寿命や g 因子を決めることのできなかった一番の問題だと思う。今回は、データを取る期間が短かったので、ある程度 PMT の電圧をかけて実験をしたのだが、PMT の電圧を下げて、より精度の良いデータを取るようにし、データを取る期間をより長く取るようにするといいたいだろう。なので、なるべく早くにセットアップを組んで、データを取るようにするべき。今回は、PMT の接着に 2 週間弱の時間がかかってしまったことが悔やまれる。

今回の実験では、文献値に近い値をえることができなかったので、問題点が多くあったのではないかと思う。ここではその中の今考えられるものしか上げていないが、もし次があるなら、過去のレポートをちゃんと細かく確認し、また他の問題点をしっかりと検討して実験に取り組みたい。これから、実験をする人たちは、この実験を反面教師により良いデータを得られるように頑張りたいと思う。

謝辞

この実験を行うにあたって、南野先生、TAの久保さん、田代さんには様々なご助言およびご指導を頂きました。この場をかりて皆様に御礼を申し上げます。ありがとうございました。

参考文献

- [1] 西島和彦 『新物理学シリーズ 13 相対論的量子力学』（培風館）
- [2] J.J.sakurai 『現代の量子力学（上）』（吉岡書店）