

# Compton散乱の検証

2023課題演習A1後期

# 理論的背景

エネルギーの角度依存性の式

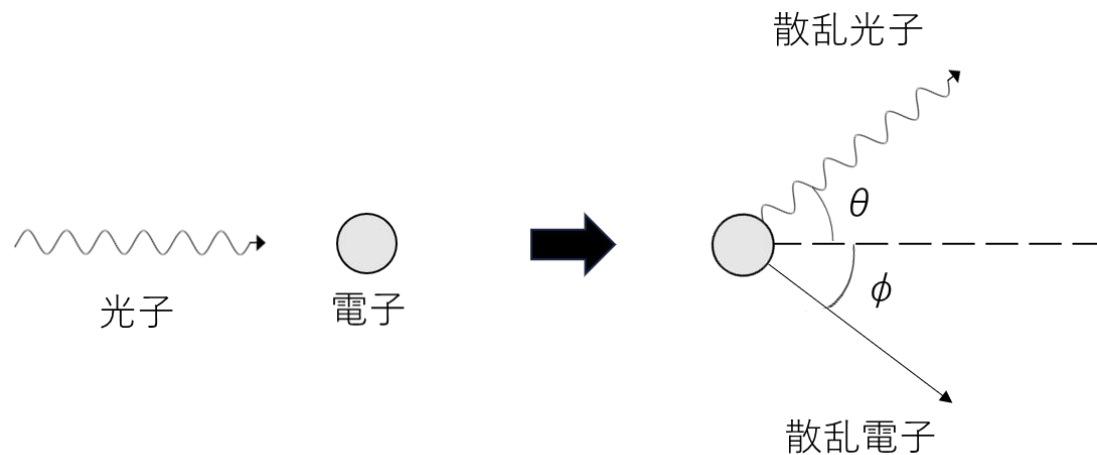
$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)}$$

微分断面積の角度依存性の式(クライン仁科の式)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left[ \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2 \theta \right]$$

これらを実験によって確かめる

## 理論的背景 ～エネルギーの角度依存性の式の導出～



エネルギー保存則と運動量保存則より得られる式から角度 $\theta$ と電子の運動量 $p$ を消去して次式が得られる。

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m} (1 - \cos \theta)}$$

## 理論的背景 ～クライン仁科の式の導出～

QEDで確率振幅を摂動展開する

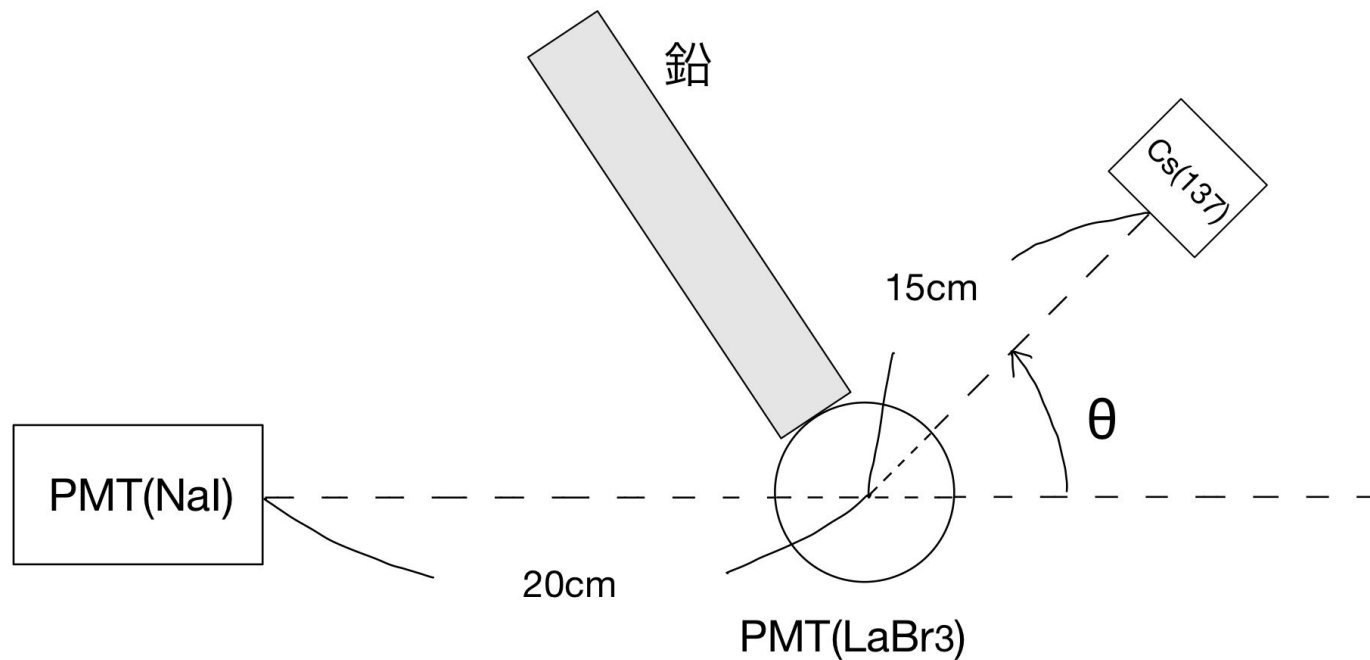
$$\langle f|e^{iH_0t}e^{-iHt}|i\rangle = \langle f|i\rangle + \langle f|e\hat{O}_1(t)|i\rangle + \langle f|e^2\hat{O}_2(t)|i\rangle + \dots$$

1次の摂動は0→2次が主要項.2次の項を具体的に計算して,これを用いて遷移確率を計算し,微分断面積を計算すればクライン仁科の式を得る.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[ \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2\theta \right]$$

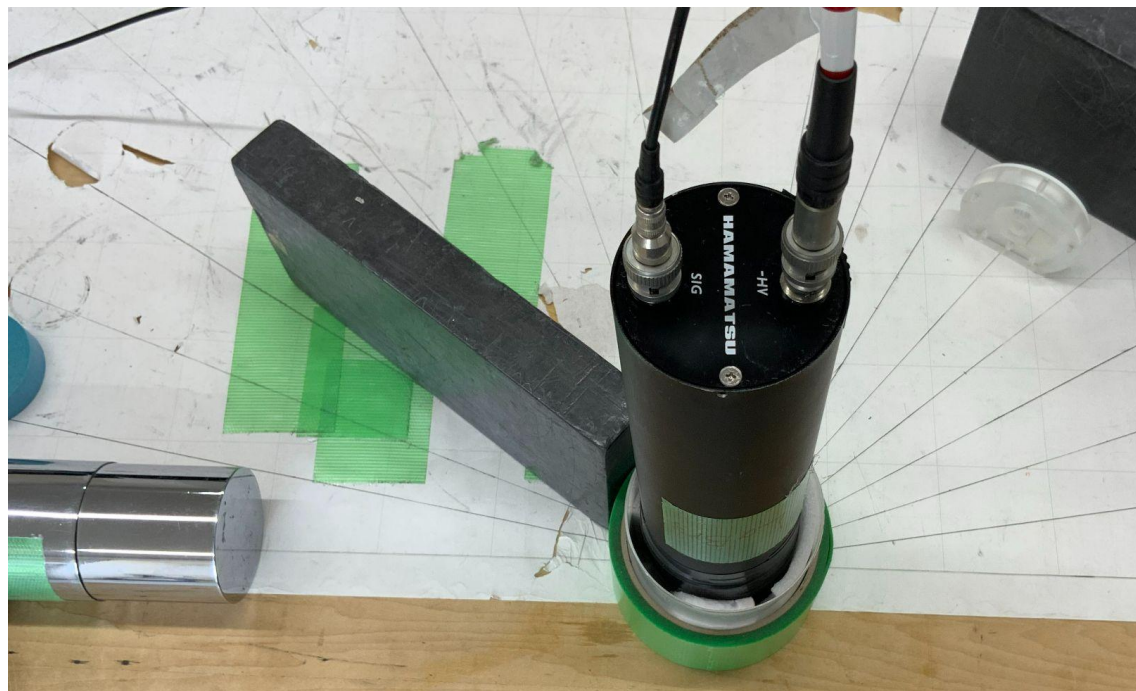
# セットアップとデータ取得(青梨)

## 実験装置の配置



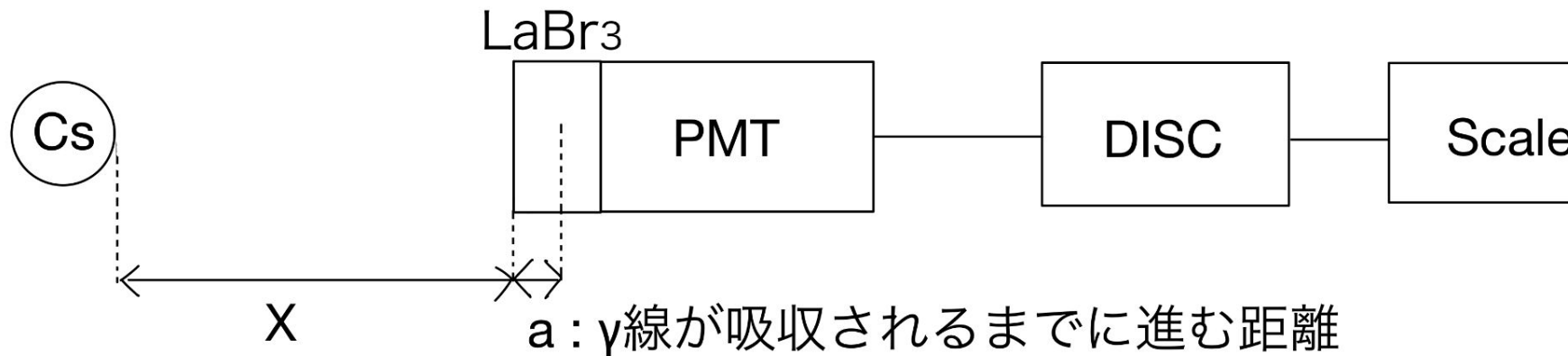
# セットアップとデータ取得

実際の画像



# セットアップとデータ取得(時間がなければ削る)

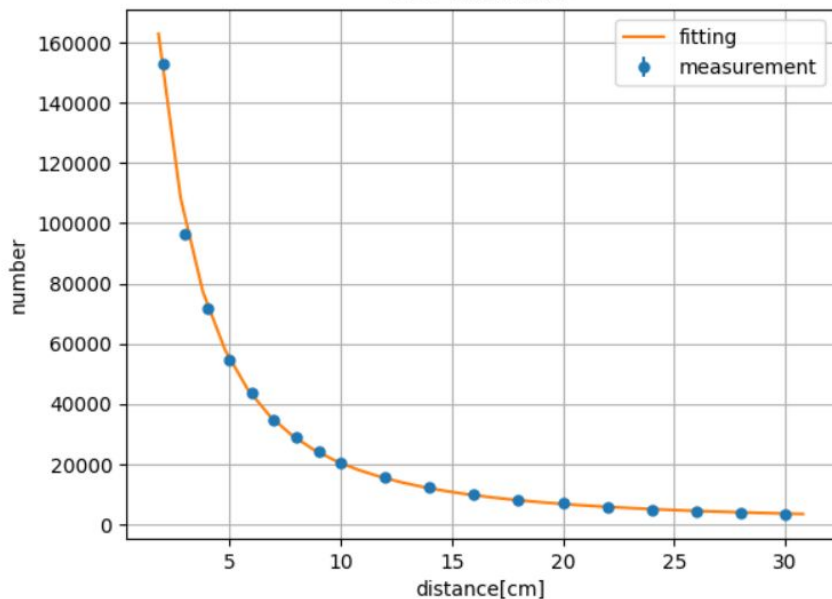
LaBr<sub>3</sub>の平均自由行程の測定



# セットアップとデータ取得(時間がなければ削る)

## 取得したデータ

シンチレータとの距離と計測回数



y: 検出数 dist: LaBr<sub>3</sub>と線源の距離  
 $y = b / (x + a)^2$ でフィッティング

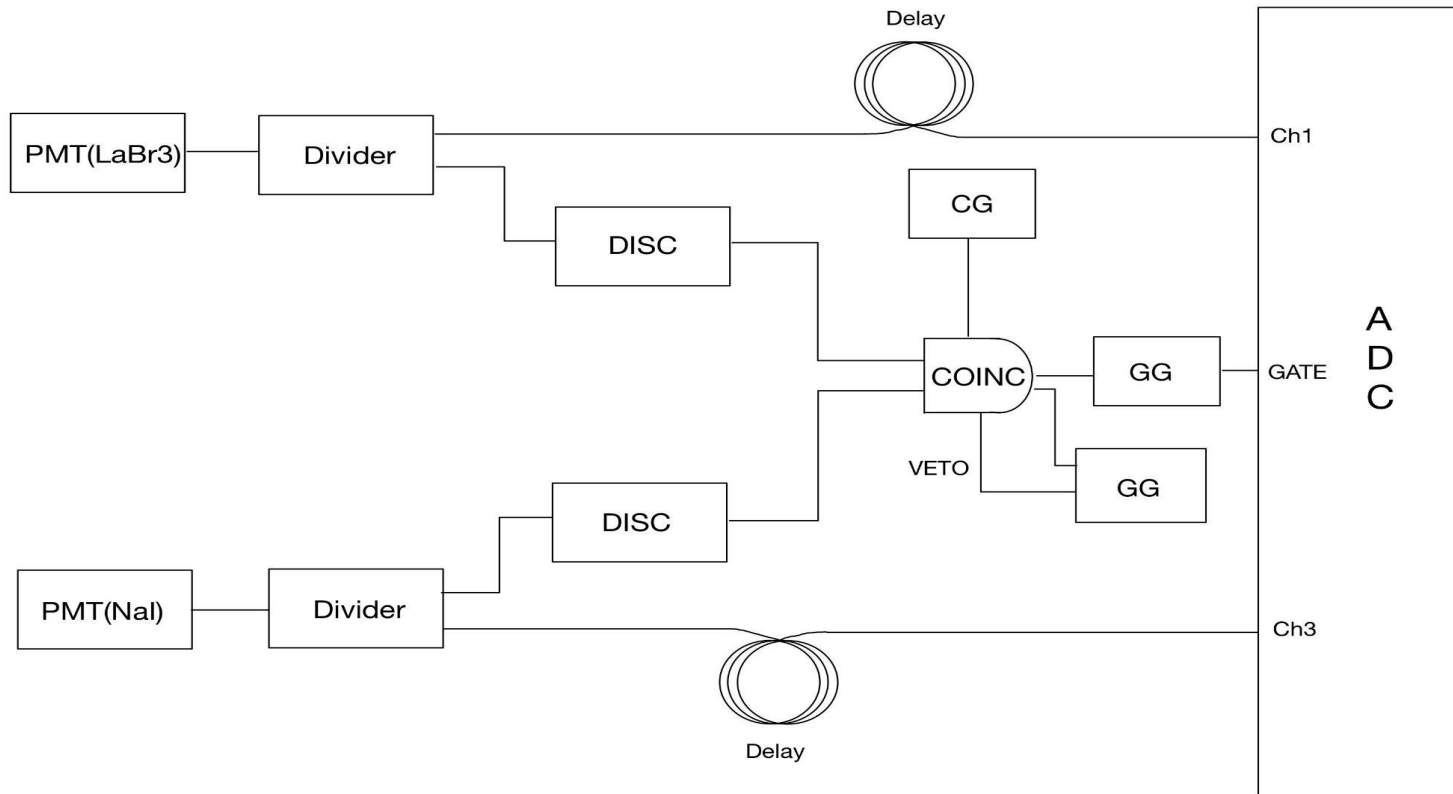
$a \approx 2.56 \text{ cm}$   
(シンチレータの半径)  $\approx 2.4 \text{ cm}$

LaBr<sub>3</sub>の中心で反応が起こると考えることとする



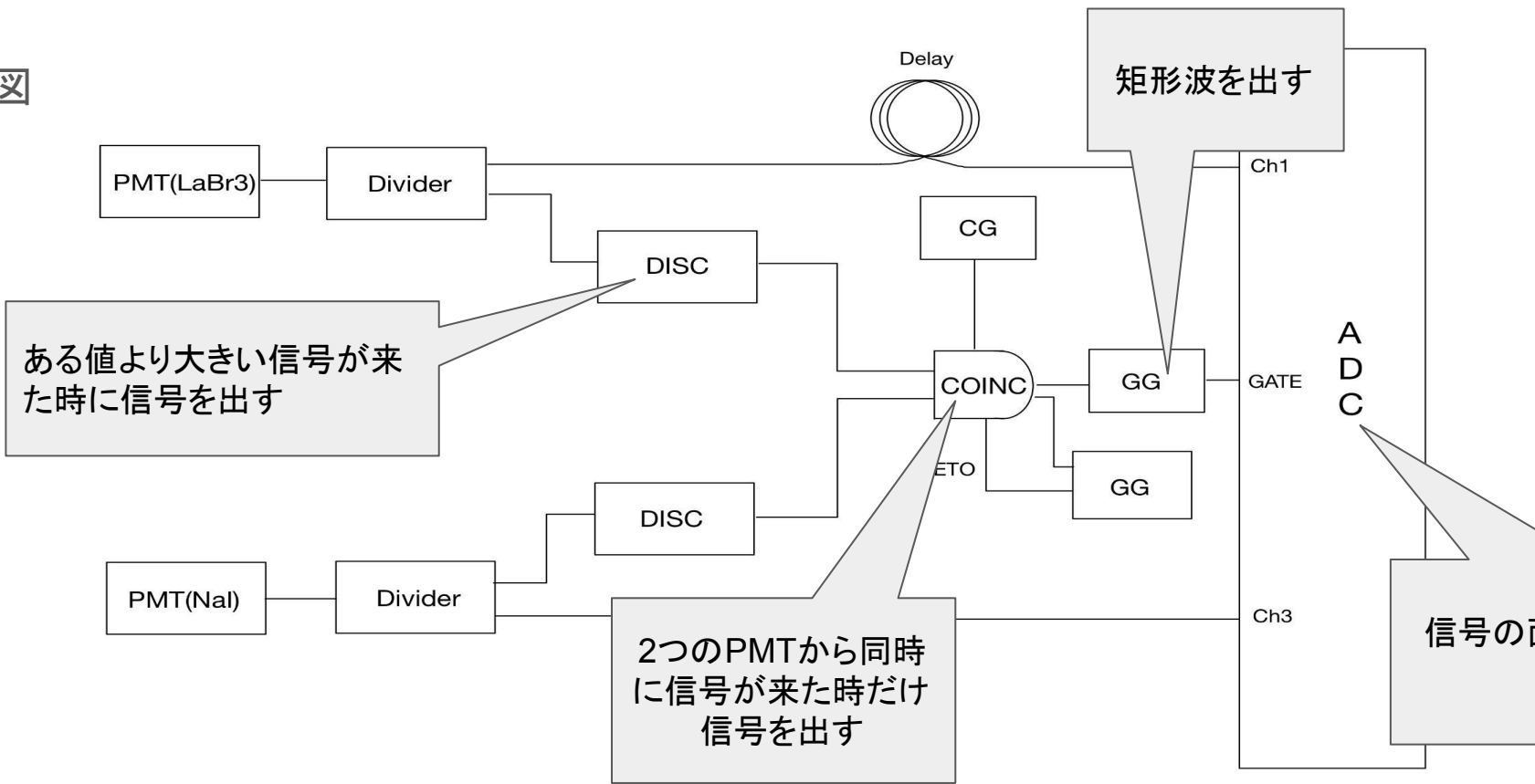
# セットアップとデータ取得

## 配線の図



# セットアップとデータ取得

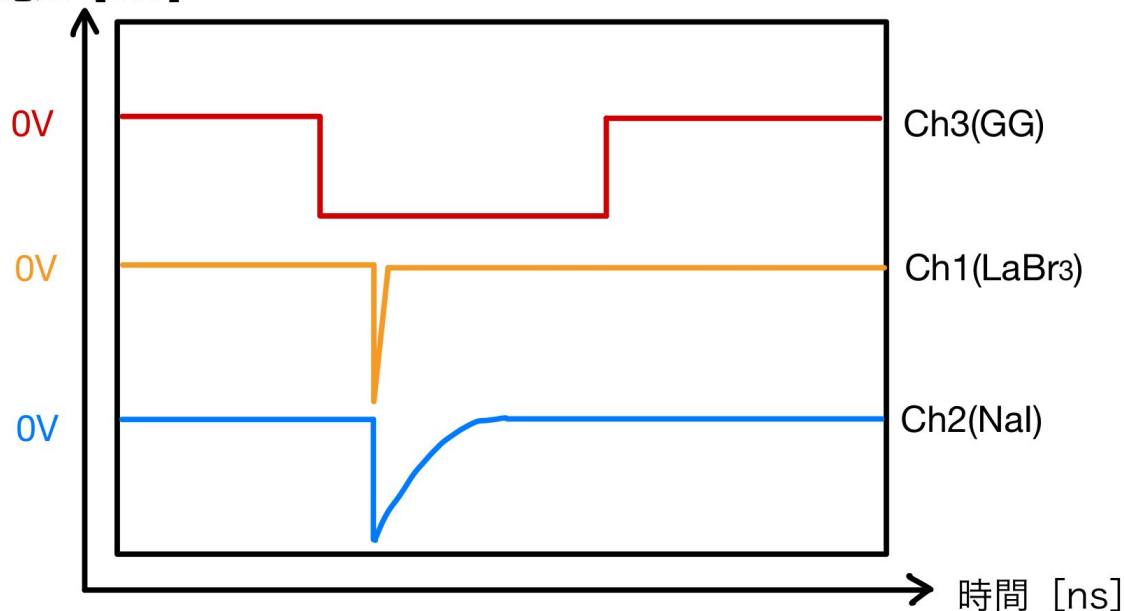
## 配線の図



# セットアップとデータ取得

オシロスコープに出力される信号の概形

電圧 [mV]



- GGの信号にCh1、Ch2の信号が含まれるようにDelayをかけて信号を遅らせる

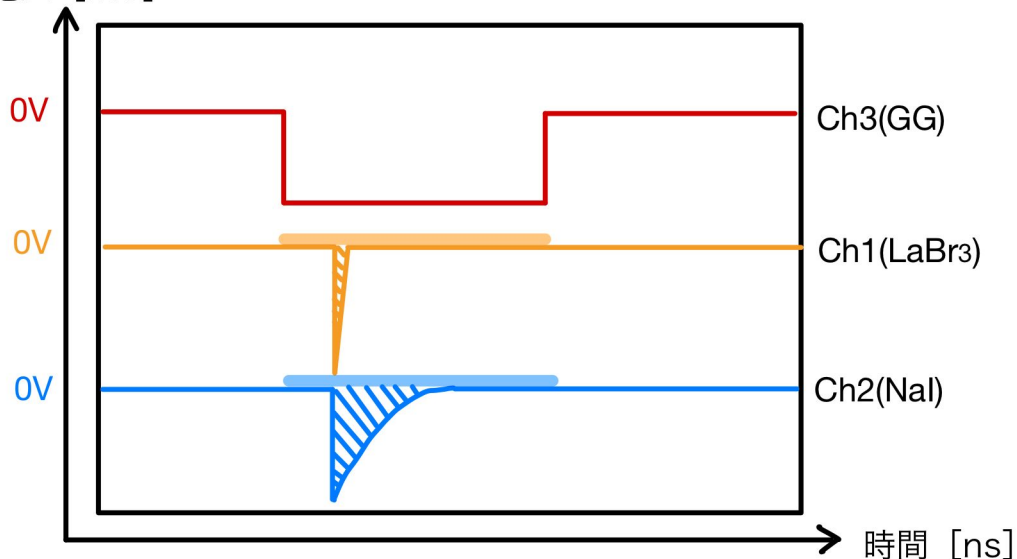
- GGの信号にかぶっている範囲でCh1、Ch2の面積を計算してエネルギーを求める

# セットアップとデータ取得(時間が無ければ削る)

## ペDESTタルの除去

ペDESTタル: 信号入力がないときのADCの値

電圧 [mV]



左図の薄い線が引いてある所は  
ギザギザしており、ペDESTタルの  
影響がADCの値に現れる

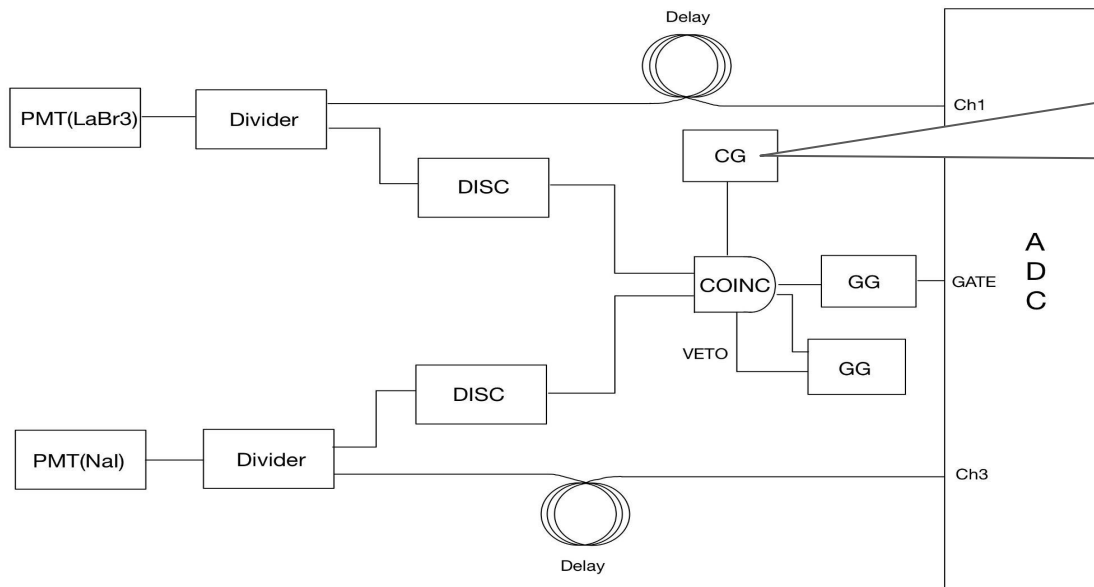
↓

取得したADC値からペDESTタル分を  
し引いて、意味のある値だけ  
を取り出す

# セットアップとデータ取得(時間が無ければ削る)

## 除去の方法

クロックジェネレーターで矩形波を(本実験では1 kHzで)出力してペDESTALのADC値を求める

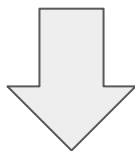


シンチレータに信号が入らないように線を鉛で囲って矩形波を出す

この矩形波で積分してペDESTALのADC値を得る

# キャリブレーション(栗田)

※実験から得られるデータはADCの値。



エネルギーとADCカウントの  
関係式を求めて、変換する必要がある。

前提として、

- 1、Csが662keVでピーク値をとることは既知。
- 2、関係式は線形であると仮定。

## 方法

前提(前スライドから)

- 1、Csが662keVでピーク値をとる。
- 2、関係式は線形と仮定。

前提からCsが0keVと662keVでとるADCカウントを調べる。

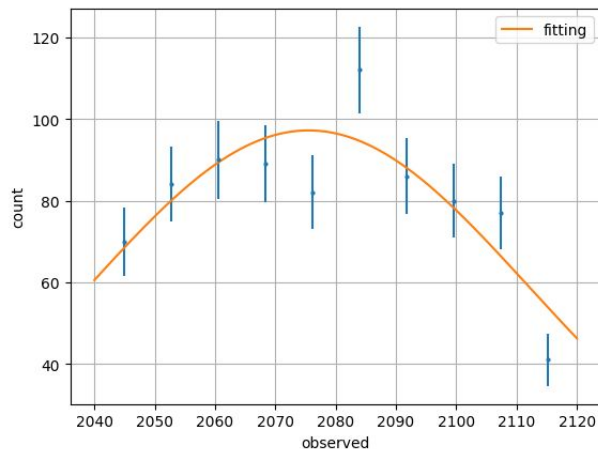
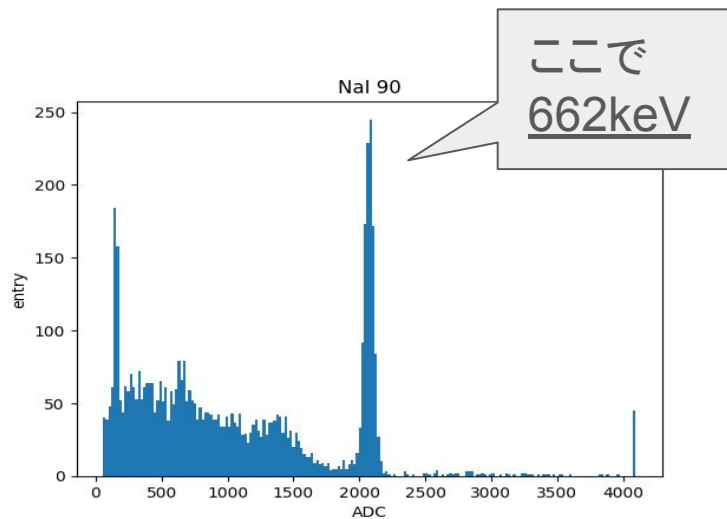
得られた2点の情報から関係式を導出。(E=aX+b)

0keVはCsがない状態(背景放射)での測定。

# Fitting (具体例として90°の場合で説明)

NaIシンチレータで662keVをとる時のADCカウントを調べるため、Fittingが必要。

ピーク周りをガウス分布でFittingする。



ピーク値は  
 $2075.5 \pm 3.1$

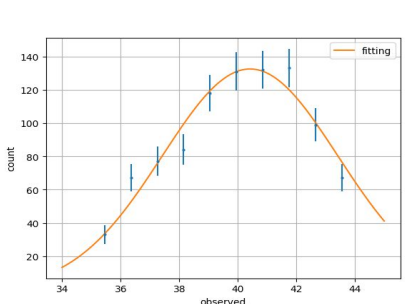
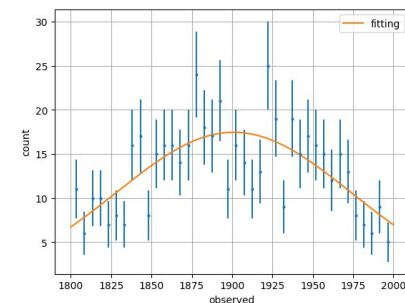
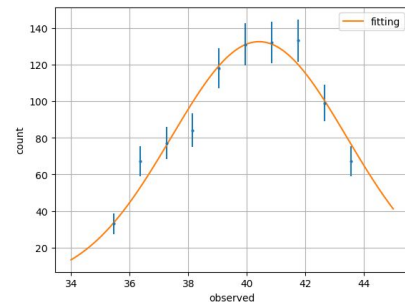
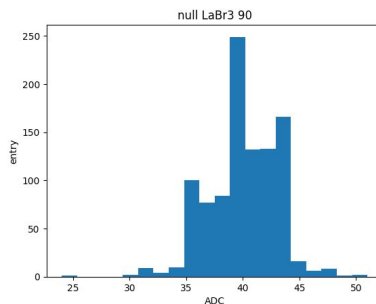
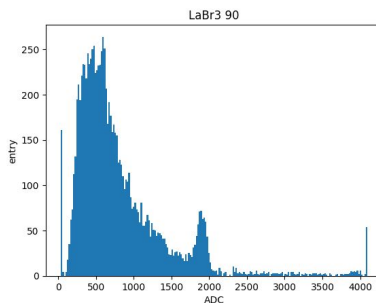
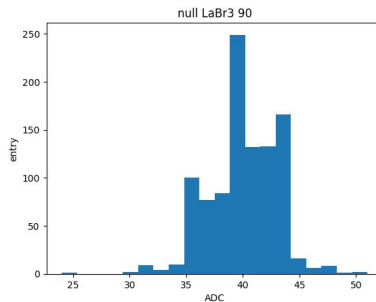


# Fitting

他にもNaIの0kev、Labr3の

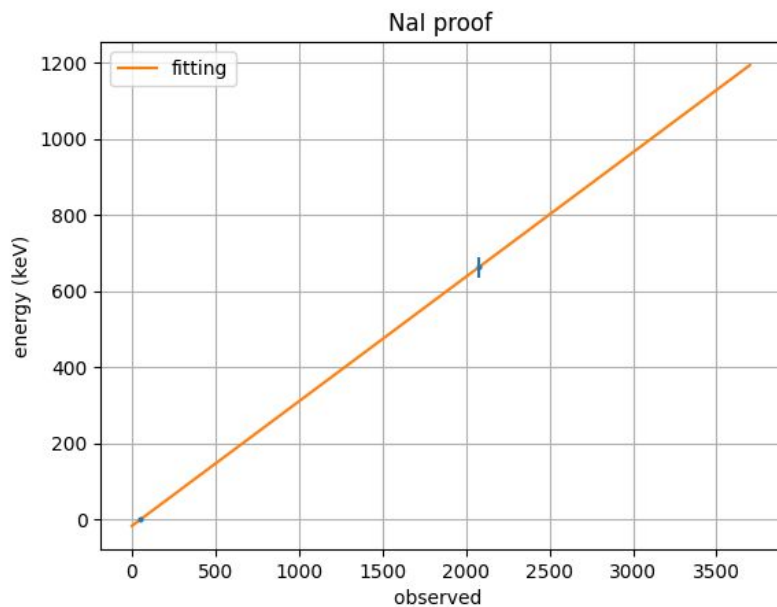
0kev、662keVに対応する

ADCカウントを調べた。

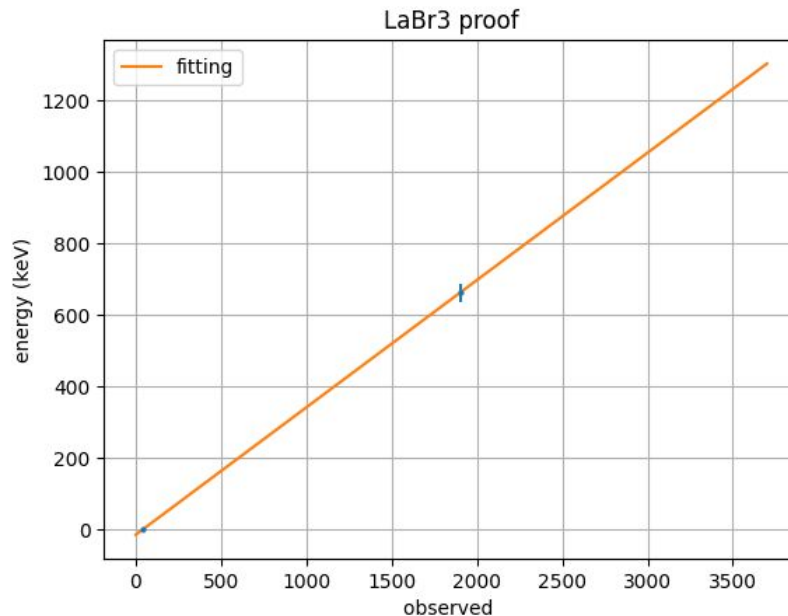


# 関係式の導出( $E=aX+b$ )

得られた2点の情報からエネルギーE、ADCの値Xの関係式を導出。



$$(NaI) E=0.327X-16.7$$

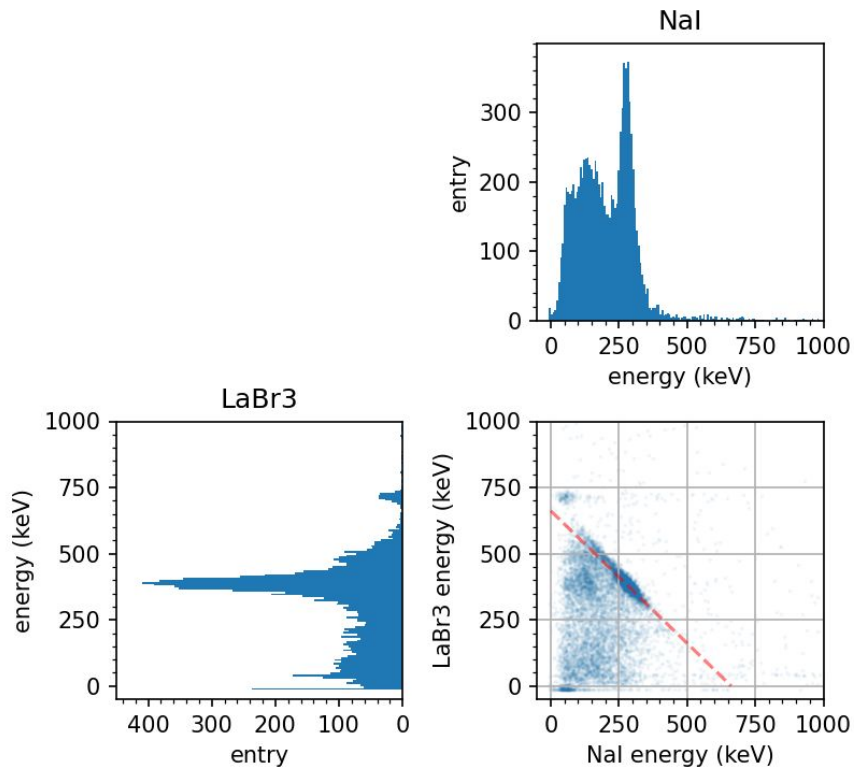


$$(LaBr3) E=0.356X-14.4$$

セシウムの角度を変えて同じ操作を繰り返した。

|     | NaI   |       | LaBr3 |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|
| 角度  | a     | b     | a     | b     |
| 30  | 0.359 | -11.7 | 0.352 | -14.9 |
| 60  | 0.363 | -12.2 | 0.339 | -15.1 |
| 90  | 0.327 | -16.7 | 0.356 | -14.4 |
| 120 | 0.365 | -11.7 | 0.336 | -14.0 |
| 150 | 0.358 | -13.0 | 0.342 | -16.2 |
| 180 | 0.354 | -17.6 | 0.337 | -20.1 |

# データ解析[エネルギー分布]



←山の高さが検出数の多さを表す

←密度の高さが検出数の多さを表す

←赤線は662keV,つまり入射したエネルギーの大きさ

赤線付近で密度の高い点でコンプトン散乱が起きていると期待できる

図. コンプトン散乱(90°)における各検出器のヒストグラムと散布図

# データ解析[エネルギー分布]

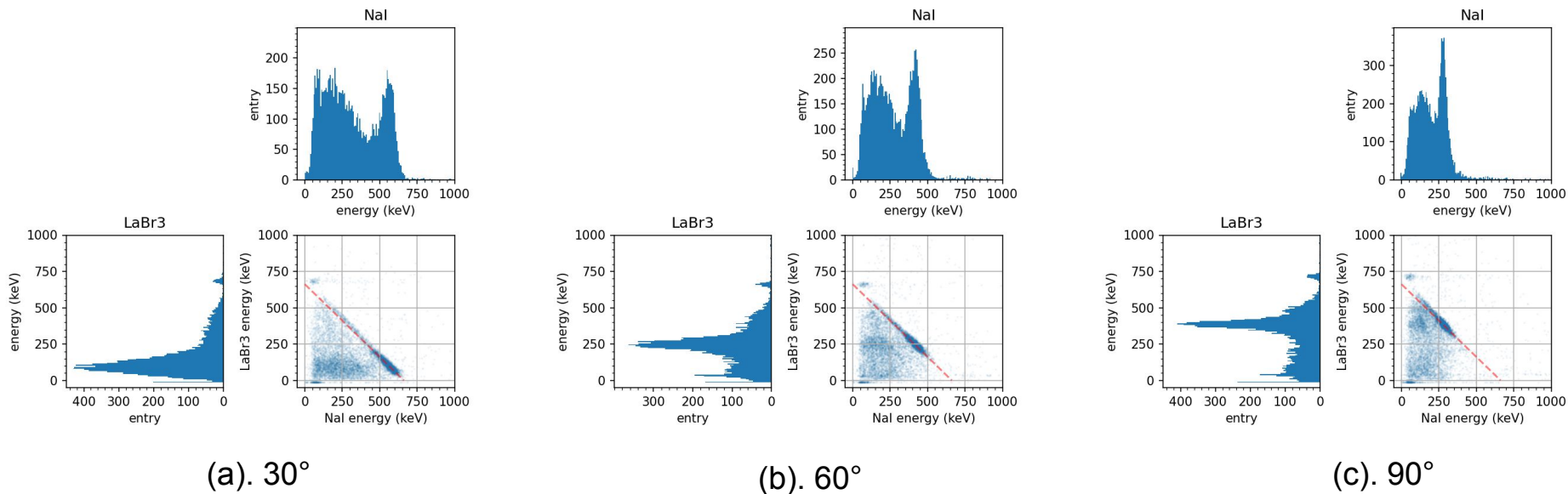
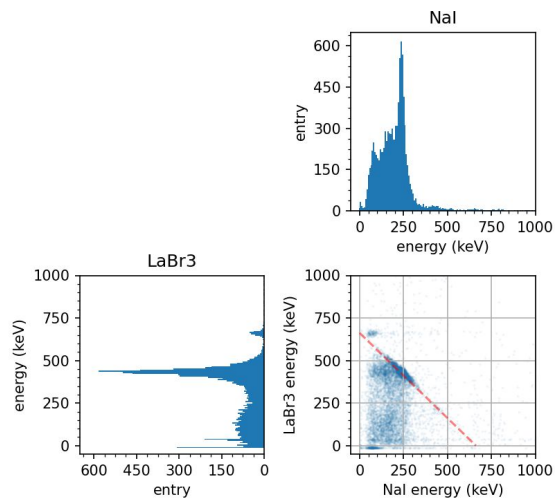
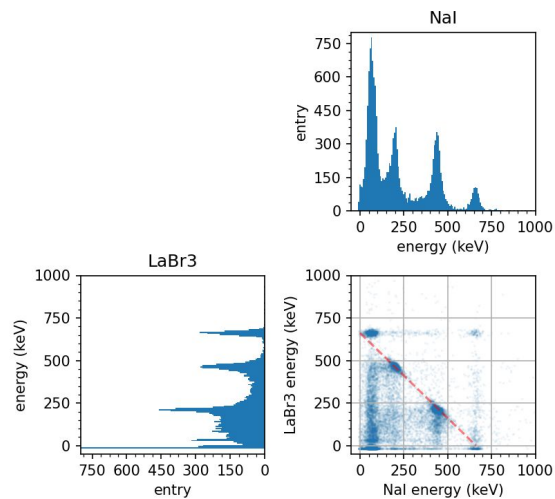


図. 各角度ごとのエネルギー分布

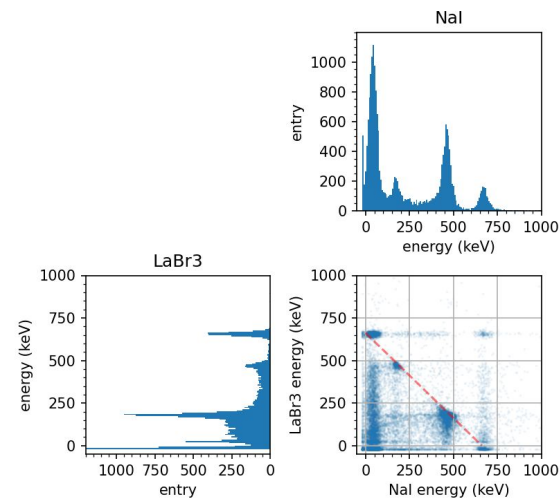
# データ解析[エネルギー分布]



(d). 120°



(e). 150°



(f). 180°

図. 各角度ごとのエネルギー分布

# データ解析[エネルギー分布]

コンプトン散乱のエネルギーを読み取る

(例). NaI 30°でのフィッティング

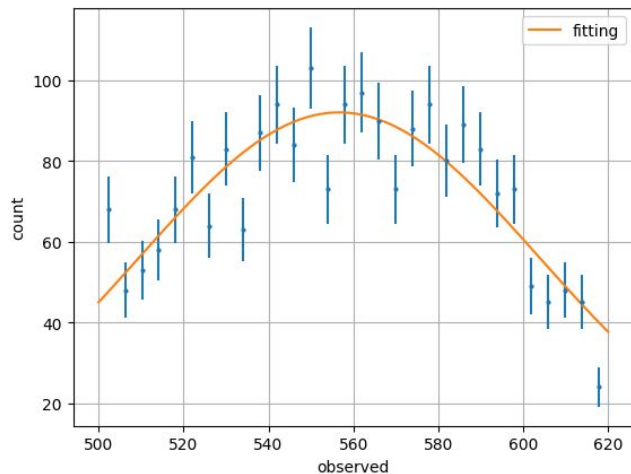


図. compton\_30 fitting

ガウシアンフィッティング

$$f(x) = ae^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

# データ解析[エネルギー分布]

表. エネルギーの角度分布

| $\theta$ | NaI (keV)  | LaBr <sub>3</sub> (keV) | 合計(keV)    |
|----------|------------|-------------------------|------------|
| 30       | 556.7±2.07 | 91.5±2.34               | 648.2±0.41 |
| 60       | 413.2±1.90 | 248.2±1.41              | 661.4±0.31 |
| 90       | 276.5±0.95 | 387.0±1.04              | 663.5±0.34 |
| 120      | 237.5±1.02 | 433.5±0.68              | 671.0±0.24 |
| 150      | 194.6±1.66 | 462.5±0.70              | 657.1±0.39 |
| 180      | 171.6±1.54 | 466.7±1.11              | 638.3±0.35 |



# データ解析[エネルギー分布]

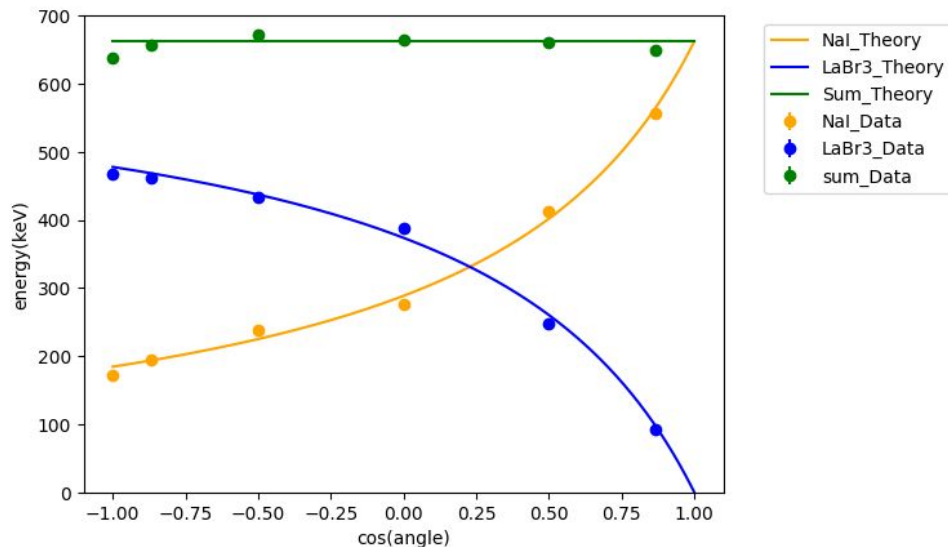


図. エネルギー角度分布

## コンプトン散乱の理論式

NaIのエネルギー

$$E_N = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos\theta)}$$

LaBr<sub>3</sub> のエネルギー

$$E_L = h\nu - E_N$$

ここでは  $h\nu = 662 \text{ keV}$

# データ解析[微分断面積](三日月)(理論)

クライン-仁科の式(QEDにより導出)

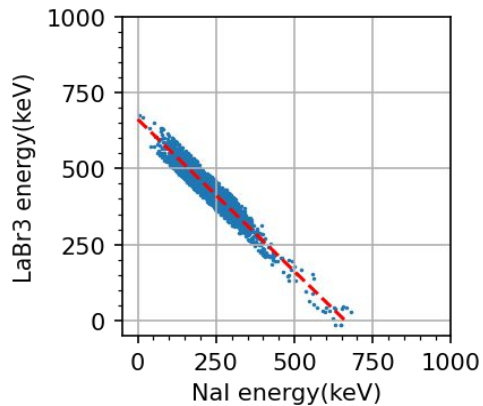
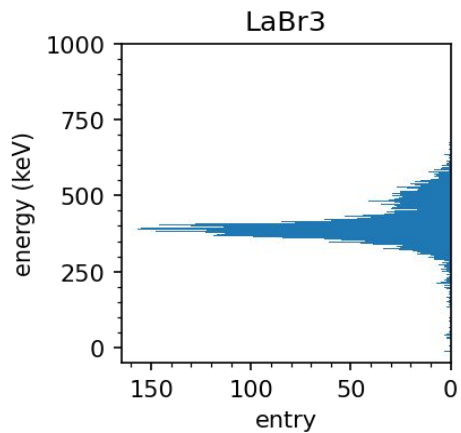
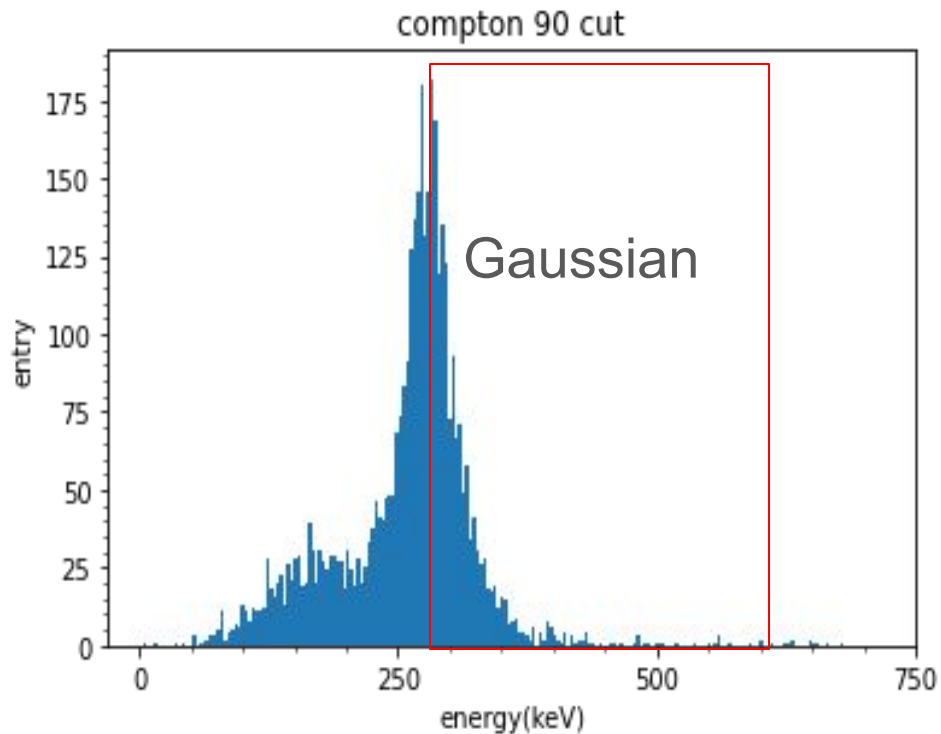
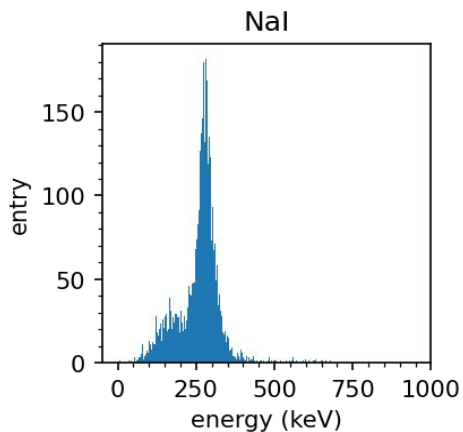
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left[ \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2 \theta \right]$$

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)}$$

実験結果との比較によってQEDの検証を行う

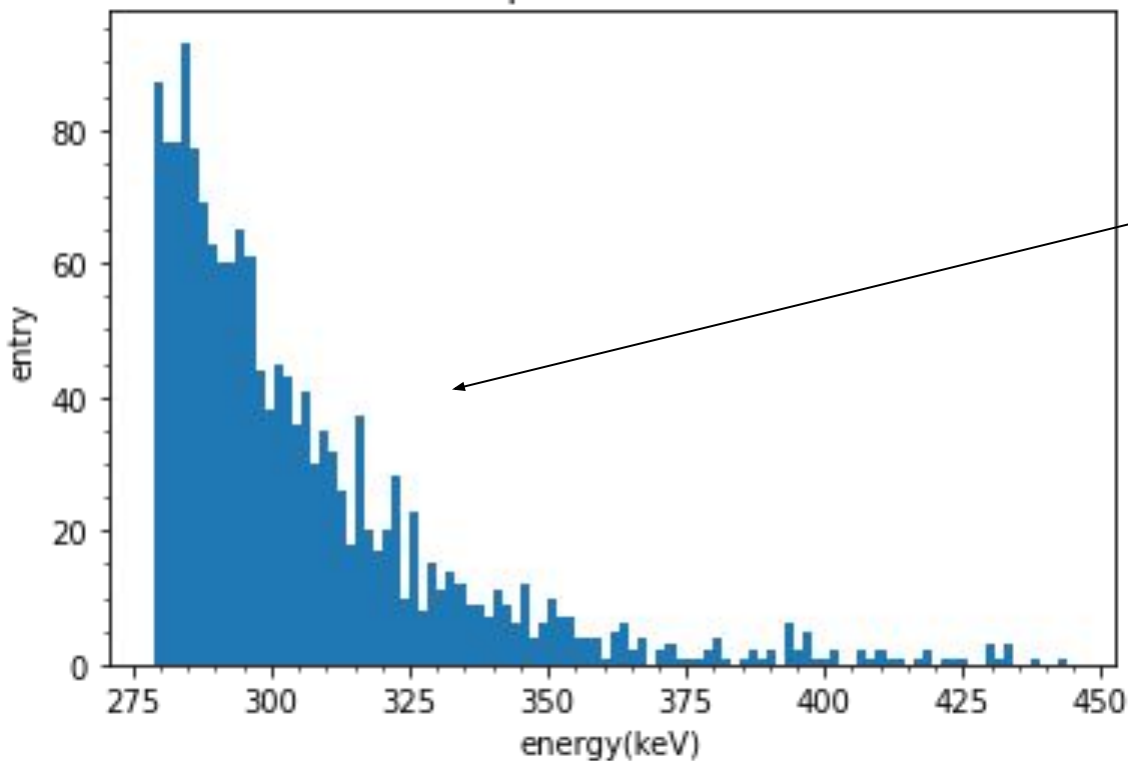
# データ解析[微分断面積](データ取得)

90°Data(カット済み)



# データ解析[微分断面積](データ取得)

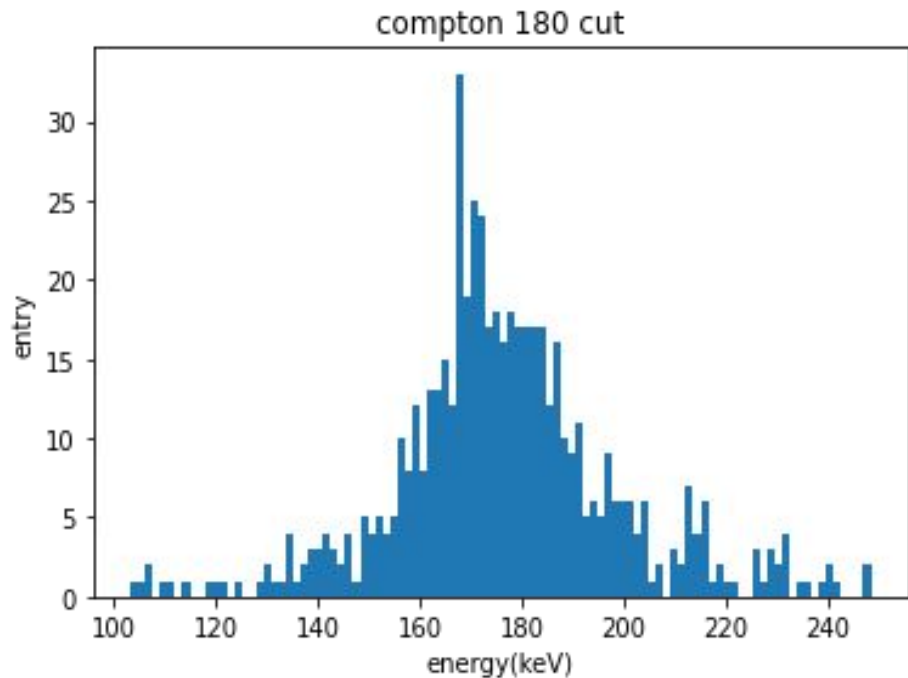
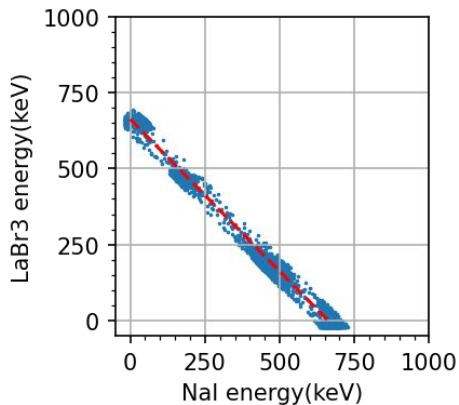
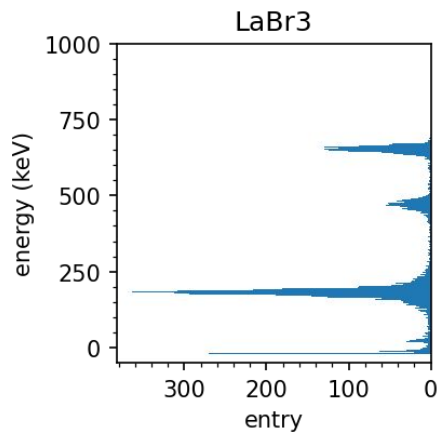
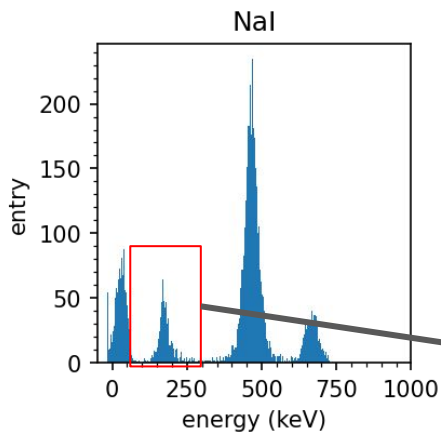
compton 90 cut half



Gaussianに近似可能な部分の  
要素数を数えて二倍

# データ解析[微分断面積](データ取得)

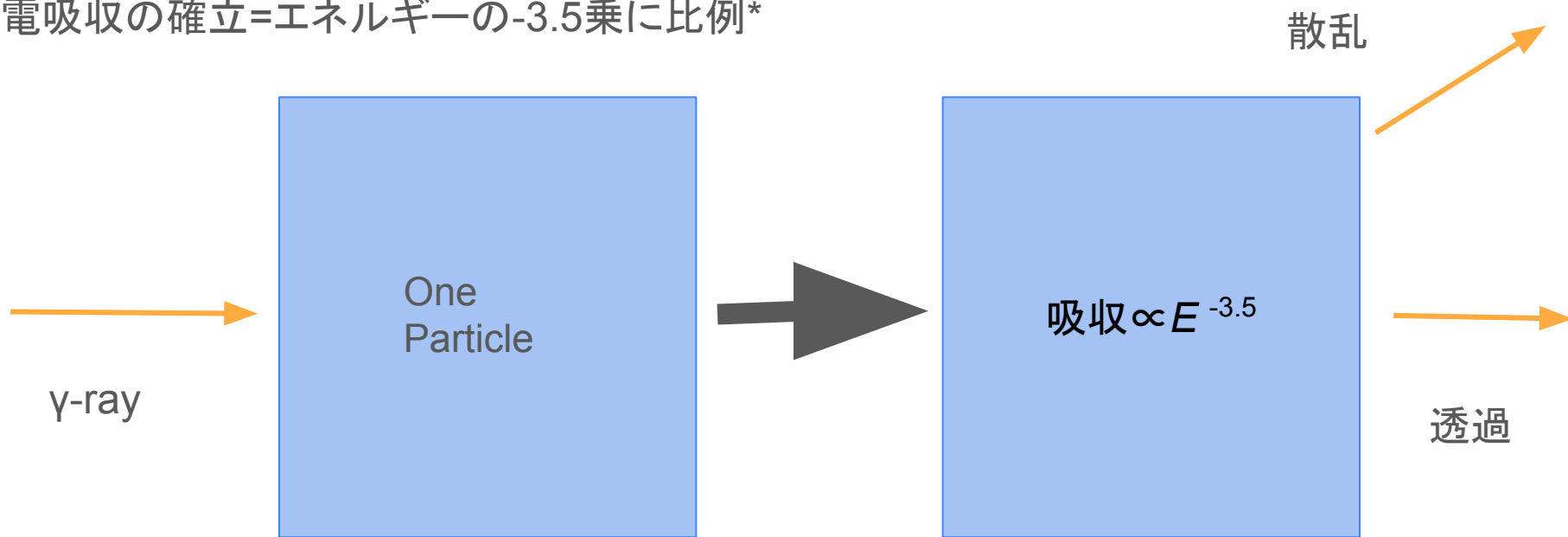
180°Data(カット済み)



これ(NaI光電吸収の数)をカウント

# データ解析[微分断面積](全入射数への換算)

原子への入射：  
光電吸収の確立=エネルギーの-3.5乗に比例\*



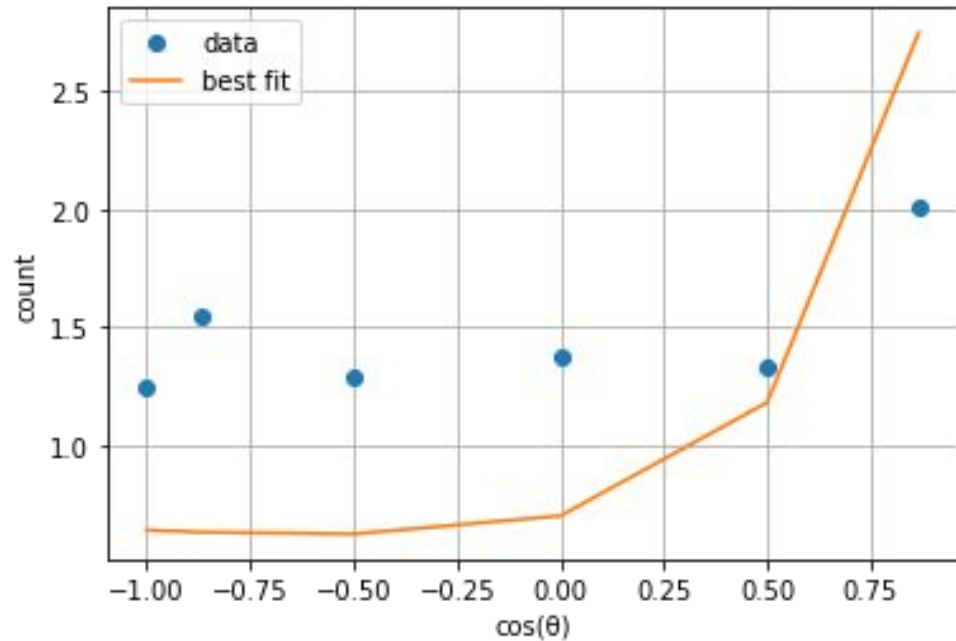
参考文献\* 小田切文.4 放射線と原子分子の相互作用Radioisotopes.2017,vol.66,no.10,p.417-424.

# データ解析[微分断面積](fitting)

クライン-仁科の式で  
fitting

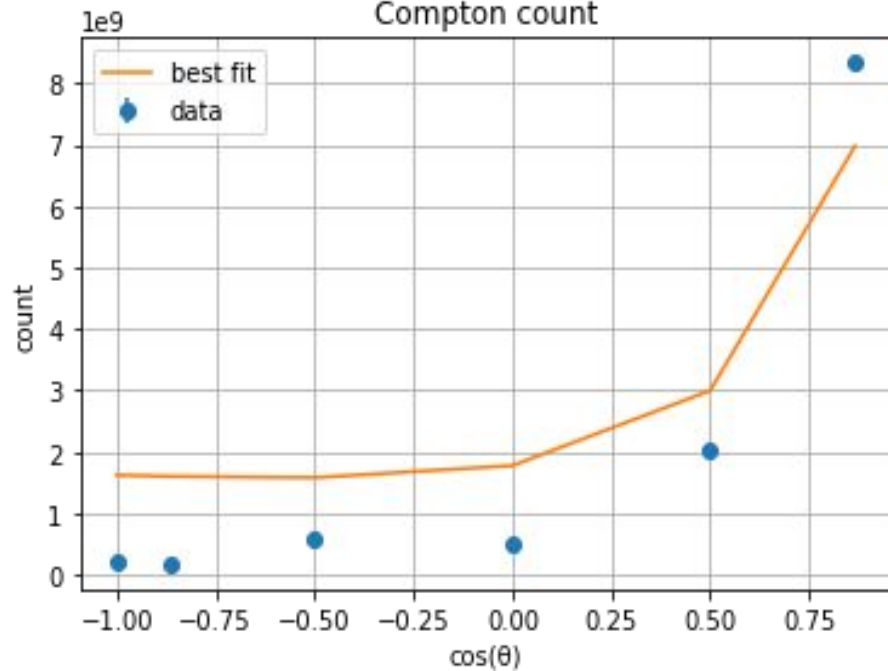
光電吸収の数

raw data



$\times E^{3.5}$ で換算

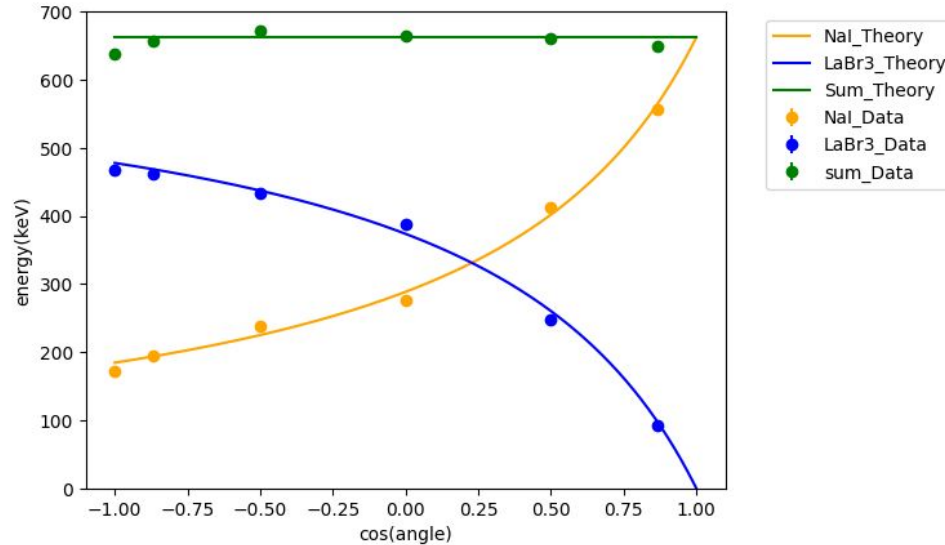
Compton count



考察



# エネルギー角度分布



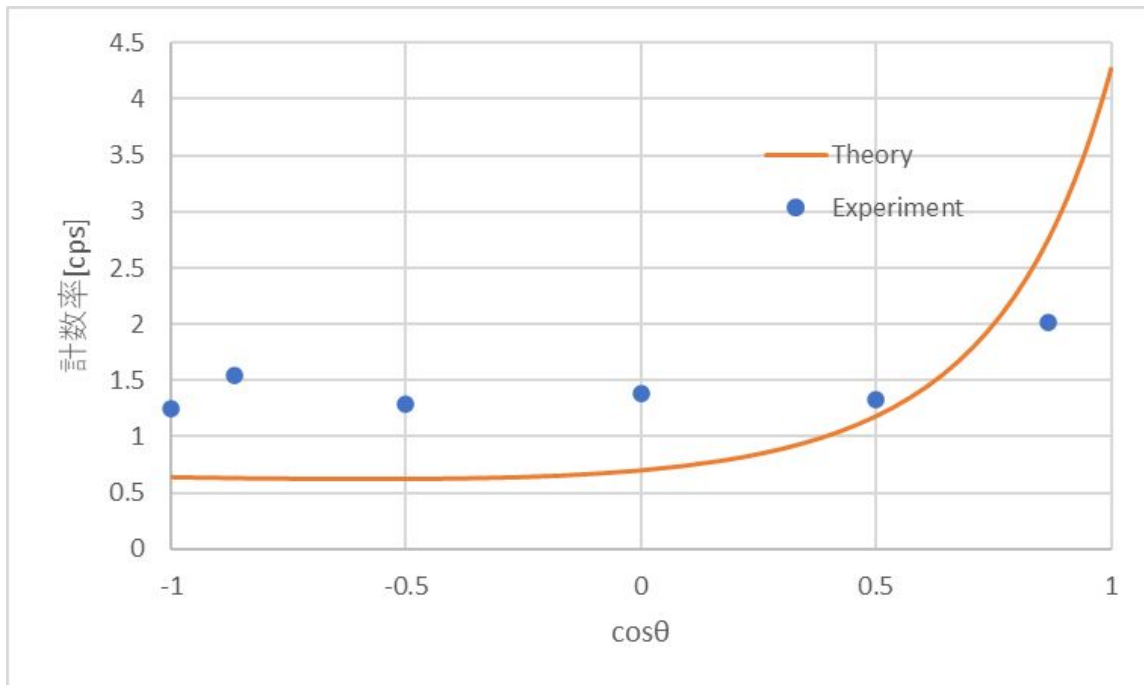
理論通りの結果となっている  
→光の粒子性が確かめられた

# 散乱確率の角度分布

$$\begin{aligned} & \text{(実験値の角度分布)} \\ = & \text{(微分散乱断面積)} \times C \text{(定数)} \end{aligned}$$

となるのが理想

# 最小二乗法でフィッティング



$$C=4.262474$$
$$\chi^2=3.474109$$

何らかの補正が必要

→ $\gamma$ 線のエネルギーによって透過率(検出率)が異なる

# NaIシンチレータ側の補正

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\rho t}$$

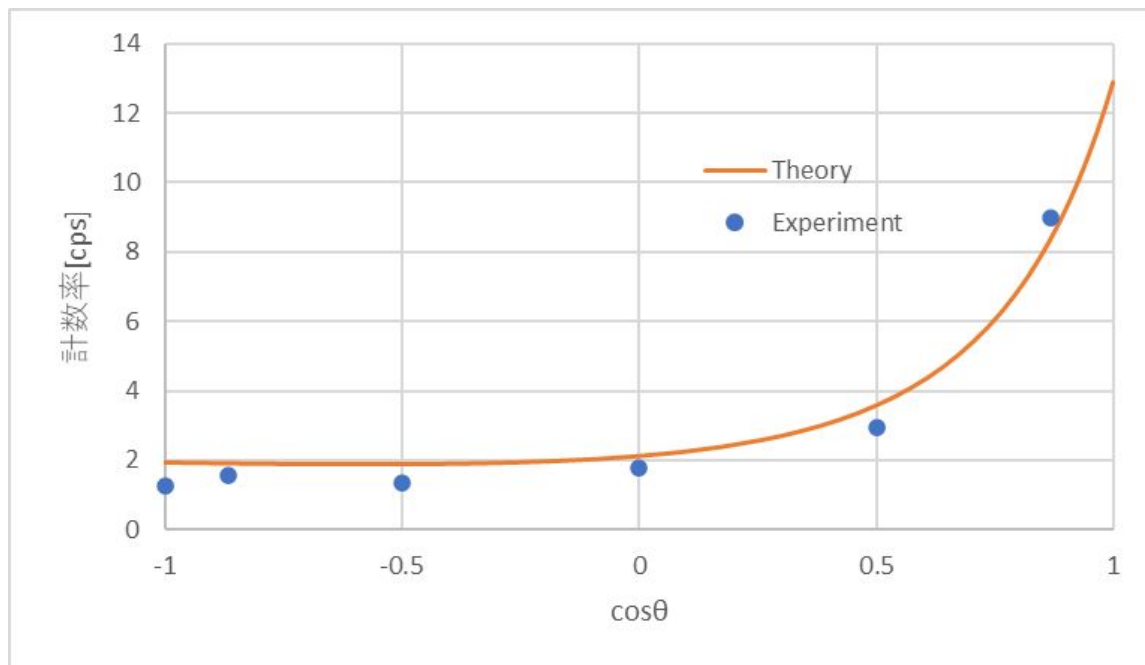
$I$  : 透過光子の数  
 $I_0$  : 入射光子の数  
 $\frac{\mu}{\rho}$  : 質量減衰係数  
 $\rho t$  : 質量長さ

| 角度 $\theta$ [deg] | 質量減衰係数 ( $\mu/\rho$ ) [cm <sup>2</sup> /g]<br>(光電吸収による) |
|-------------------|---|
| 30                | 0.01252   |
| 60                | 0.02952   |
| 90                | 0.07225   |
| 120               | 0.1448  |
| 150               | 0.2212  |
| 180               | 0.2545  |

NaIの密度3.67[g/cm<sup>2</sup>]、長さ5.5[cm]より

→  $(1 - e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\times 3.67 \times 5.5})^{-1}$  の補正が必要

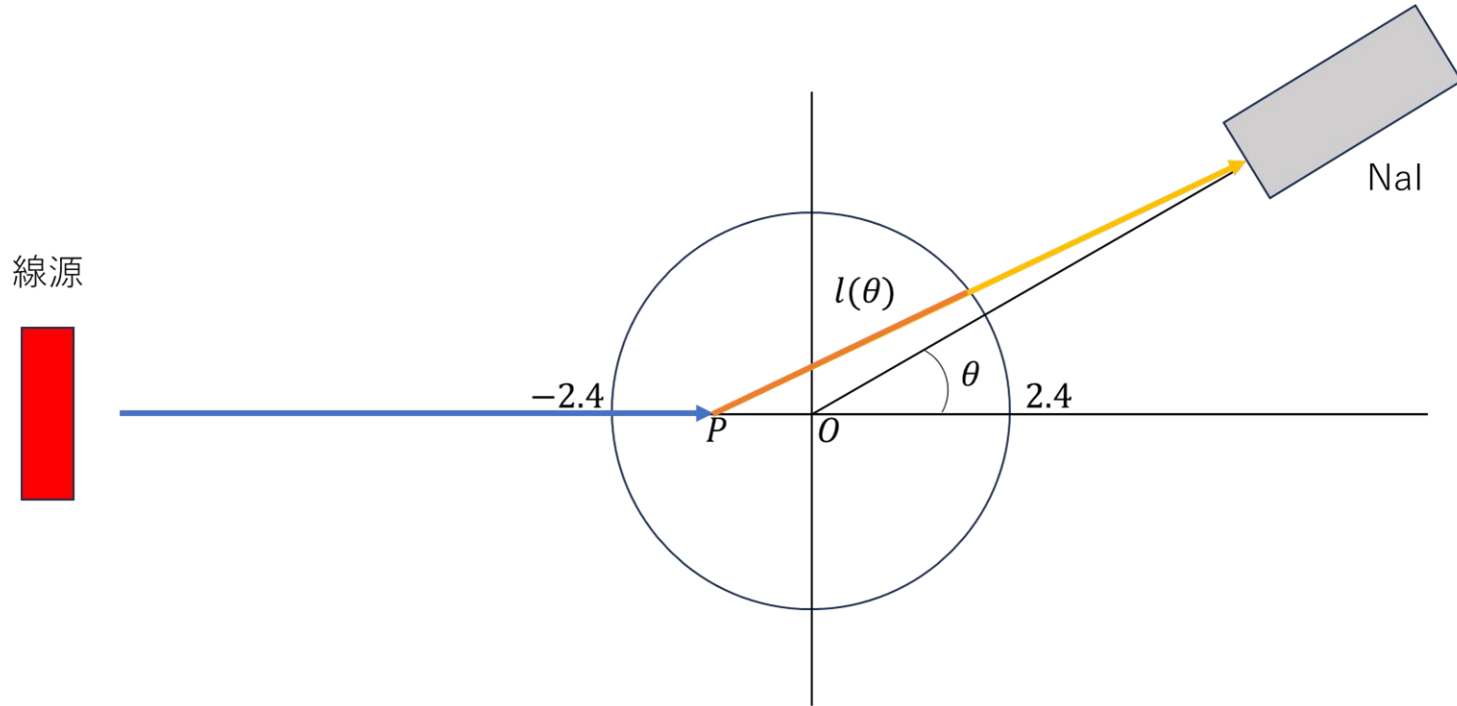
# 再び最小二乗法でフィッティング



$$C = 12.87785$$
$$\chi^2 = 0.655337$$

カイ二乗値も減少し適切な補正となっている！

# LaBr<sub>3</sub>シンチレータ側の補正



中心で散乱しないため、LaBr<sub>3</sub>から脱出する距離 $l$ が散乱角 $\theta$ による

# 散乱位置の中心からのずれ

LaBr<sub>3</sub>の密度5.29g/cm<sup>3</sup>、662keVのガンマ線に対するコンプトン散乱の質量減衰定数0.06557cm<sup>2</sup>/gより散乱位置の期待値 $d$ は

$$d = \frac{\int_0^{4.8} x e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\rho x} dx}{\int_0^{4.8} e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\rho x} dx} \cong 1.76$$

と計算できて、  
 $I(\theta)$ と質量減衰係数は右の  
ようになる

| 角度 $\theta$ [deg] |       | 質量減衰係数 $\mu/\rho$ [cm <sup>2</sup> /g] |
|-------------------|-------|--|
| 30                | 2.939 | 0.07932                                |
| 60                | 2.672 | 0.1018                                 |
| 90                | 2.334 | 0.1431                                 |
| 120               | 2.029 | 0.2037                                 |
| 150               | 1.828 | 0.2642                                 |
| 180               | 1.76  | 0.2902                                 |

LaBr<sub>3</sub>の密度5.29g/cm<sup>3</sup>より、以下の関係から、

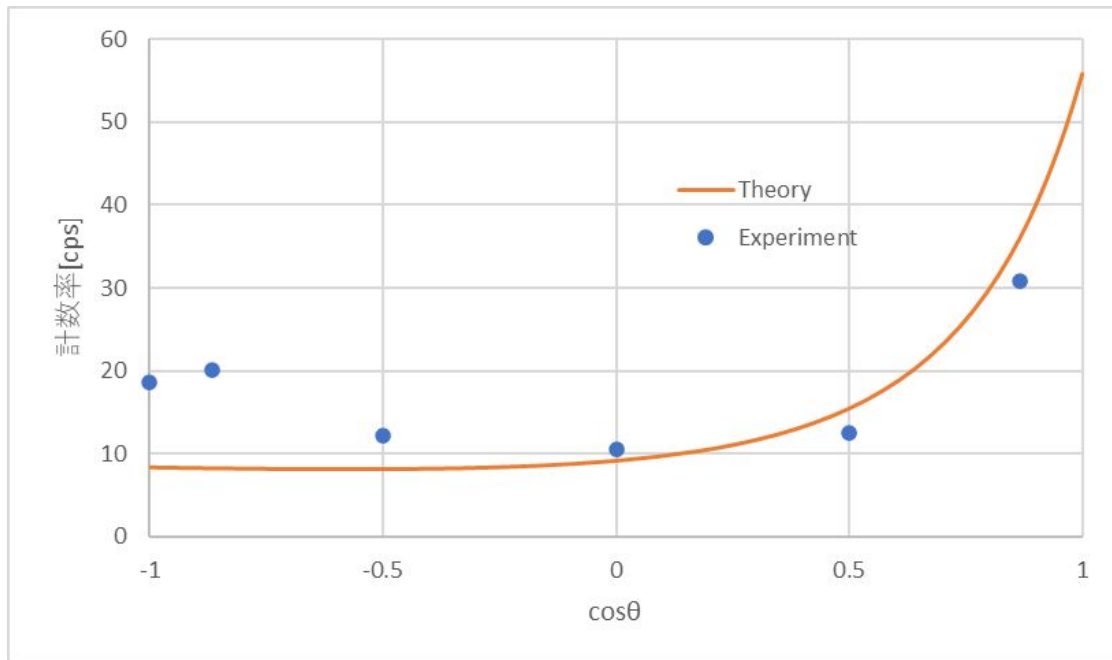
$$\frac{I}{I_0} = e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\rho t}$$

$I$  : 透過光子の数  
 $I_0$  : 入射光子の数  
 $\frac{\mu}{\rho}$  : 質量減衰係数  
 $\rho t$  : 質量長さ

→  $e^{\left(\frac{\mu}{\rho}\right) \times 5.29 \times l(\theta)}$  の補正が必要



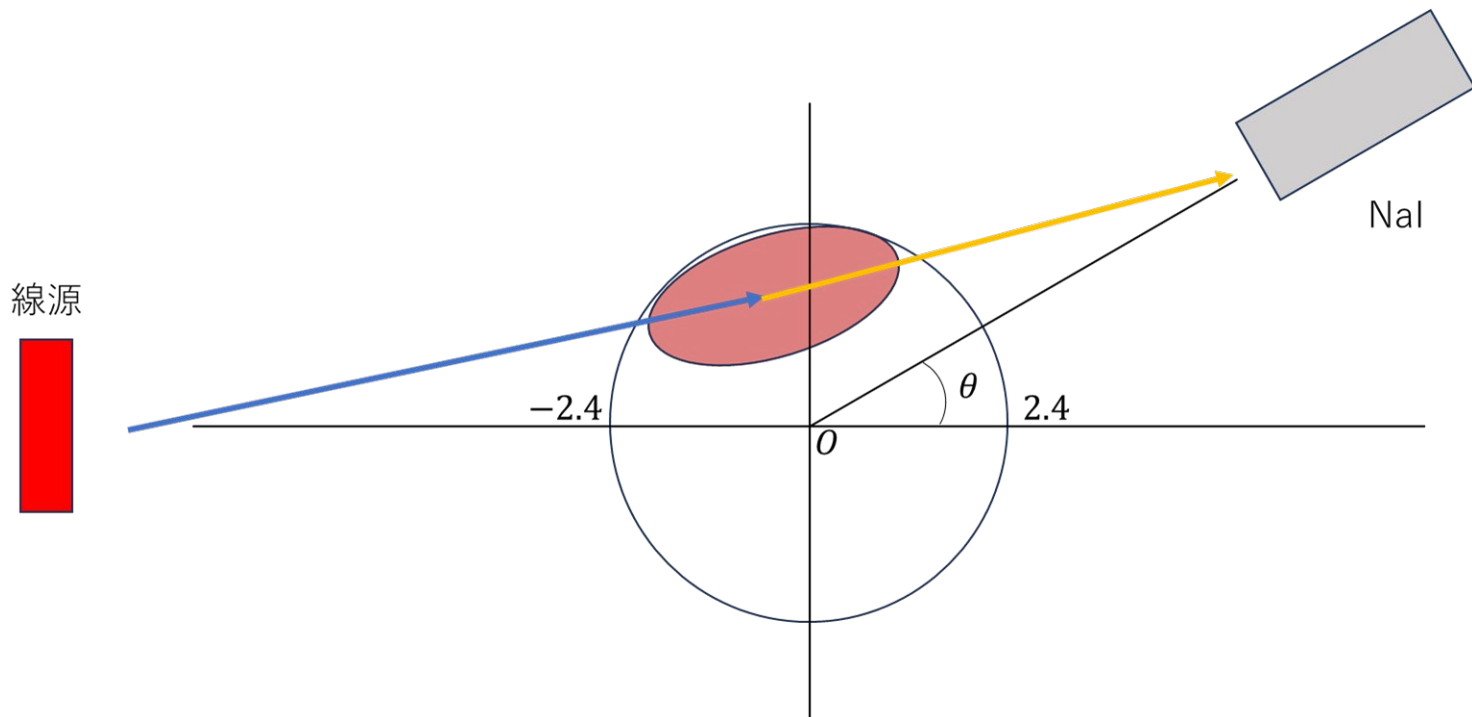
# NaIの補正に加えてさらに補正すると



$$C = 55.79989$$
$$\chi^2 = 33.06497$$

**カイ二乗値が大きく増加し、理論値から遠ざかってしまった**

# なぜ不適切なのか



実際にはLaBr3の表面付近で散乱されたものが観測値の大半である可能性

# よりよい補正をするためには...

入射光子がコンプトン散乱し、透過する割合は

$$\frac{I}{I_0} = e^{-(\mu_0 l_0 + \mu_1 l_1)}$$

$I$  : 透過光子の数

$I_0$  : 入射光子の数

$\mu_0$  : 入射光子のコンプトン  
散乱減衰係数

$\mu_1$  : 散乱後光子の減衰定数

$l_0$  : 入射光子の航行距離

$l_1$  : 散乱後光子の航行距離

→  $\mu_0 l_0 + \mu_1 l_1 \leq C$  (定数) となる

LaBr3内の領域の大きさを補正すればよい?

→ 今後の課題に...

# 結論

## エネルギー角度分布

理論通りのグラフが得られ、光の粒子性を確認できた。

## 散乱頻度の角度分布

NaIシンチレータ側の補正により、理論値に近い値が得られた。

LaBr<sub>3</sub>シンチレータ側の補正はうまくいかなかったが、NaIシンチレータの補正で十分近い値が得られていることから、より正確な補正を行ってもその影響は小さいと考える。

以上より、クライン・仁科の式を確かめられた。